

## 4. Planowanie trajektorii ruchu robota

Planowanie trajektorii ruchu robota jest związane z realizacją zadania. Problem zdefiniowany w przestrzeni zadania jest „rozkładany” na szereg trajektorii (zazwyczaj projektowanych w przestrzeni zadania), których wykonanie gwarantuje osiągnięcie postawionego celu manipulacji.

### 4.1. Układy holonomiczne i nieholonomiczne

Podział więzów kinematycznych (zależności od czasu) z punktu widzenia mechaniki analitycznej:

- więzy zależne od czasu - reonomiczne,
- więzy niezależne od czasu - skleronomiczne.

Podział więzów kinematycznych (zależność od prędkości) z punktu widzenia mechaniki analitycznej:

- więzy zależne od prędkości - nieholonomiczne,
- więzy niezależne od prędkości - holonomiczne.

## 5. Planowanie trajektorii w przestrzeni wewnętrznej

Planowanie trajektorii w przestrzeni złączy (w przestrzeni wewnętrznej) związane jest sytuacją, gdy nie jest istotna ścieżka geometryczna w przestrzeni zadania a celem ruchu jest osiągnięcie przez manipulator zadanego punktu w przestrzeni roboczej (typ ruchu określany przez skrót PTP czyli Point-To-Point).

### 5.1. Trajektorja wielomianowa trzeciego stopnia

Projektowana trajektorja pojedynczego złącza manipulatora (jakby manipulator składał się z niezależnych stopni swobody) ma postać wielomianu trzeciego stopnia:

$$q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (201)$$

przy czym współczynniki  $a_0, a_1, a_2, a_3$  określone są na podstawie warunków brzegowych, a  $t$  jest czasem.

Prędkość współrzędnej uogólnionej ma postać:

$$\dot{q}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1. \quad (202)$$

Przyspieszenie współrzędnej uogólnionej wynosi:

$$\ddot{q}(t) = 6a_3 t + 2a_2. \quad (203)$$

Współczynniki wielomianu należy wyznaczyć z warunków brzegowych tj. położenia i prędkości na początku i na końcu trajektorii:  $q_0, q_k, \dot{q}_0, \dot{q}_k$  i czasu trwania ruchu  $t_k$ . Na podstawie równań (201) i (202):

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= a_0, \\ \dot{q}_0 &= a_1, \\ q_k &= a_3 t_k^3 + a_2 t_k^2 + a_1 t_k + a_0, \\ \dot{q}_k &= 3a_3 t_k^2 + 2a_2 t_k + a_1, \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Rozwiązanie uwzględniające powyższe warunki:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= q_0, \\ a_1 &= \dot{q}_0, \\ a_2 &= \frac{3}{t_k^2} (q_k - q_0) - \frac{1}{t_k} (\dot{q}_k + 2\dot{q}_0), \\ a_3 &= -\frac{2}{t_k^3} (q_k - q_0) + \frac{1}{t_k^2} (\dot{q}_k + \dot{q}_0). \end{aligned} \right\} \quad (205)$$

Jeżeli ruch ogniwa ma wynikać z warunku „z zatrzymania do zatrzymania” wówczas współczynniki wielomianu wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= q_0, \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= \frac{3}{t_k^2} (q_k - q_0), \\ a_3 &= -\frac{2}{t_k^3} (q_k - q_0). \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

Zaprojektowanie takiego ruchu dla manipulatora wymaga wyznaczenia wielomianów dla wszystkich stopni swobody, przy czym czas trwania ruchu  $t_k$  jest taki sam dla wszystkich wielomianów. Współczynniki wielomianów wynikają z położeń początkowych i końcowych współrzędnych uogólnionych obliczonych z zadania odwrotnego kinematyki dla danego punktu początkowego i końcowego w przestrzeni zadania.

## 5.2. Trajektoria wielomianowa piątego stopnia

Przy wyznaczaniu współczynników wielomianu (201) nie jest możliwe jednoczesne uwzględnienie ograniczeń związanych z przyspieszeniem początkowym i końcowym. Rozwiązanie tego problemu może być wielomian piątego stopnia:

$$q(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0. \quad (207)$$

Ograniczenia dla rozważanego wielomianu przyjmują postać:

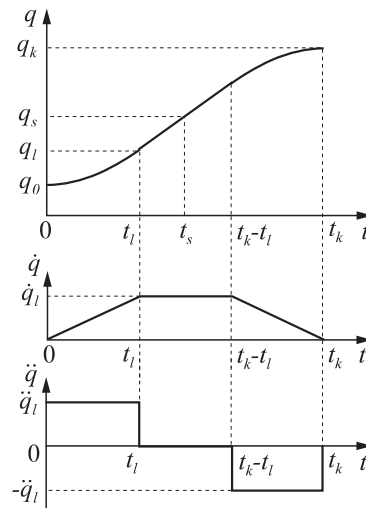
$$\left. \begin{aligned} q_0 &= a_0, \\ q_k &= a_0 + a_1 t_k + a_2 t_k^2 + a_3 t_k^3 + a_4 t_k^4 + a_5 t_k^5, \\ \dot{q}_0 &= a_1, \\ \dot{q}_k &= a_1 + 2a_2 t_k + 3a_3 t_k^2 + 4a_4 t_k^3 + 5a_5 t_k^4, \\ \ddot{q}_0 &= 2a_2, \\ \ddot{q}_k &= 2a_2 + 6a_3 t_k + 12a_4 t_k^2 + 20a_5 t_k^3. \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymamy współczynniki wielomianu:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= q_0, \\ a_1 &= \dot{q}_0, \\ a_2 &= \frac{\ddot{q}_0}{2}, \\ a_3 &= \frac{20(q_k - q_0) - (8\dot{q}_k + 12\dot{q}_p)t_k - (3\ddot{q}_p - \ddot{q}_k)t_k^2}{2t_k^3}, \\ a_4 &= \frac{30(q_0 - q_k) + (14\dot{q}_k + 16\dot{q}_p)t_k + (3\ddot{q}_p - 2\ddot{q}_k)t_k^2}{2t_k^4}, \\ a_5 &= \frac{12(q_k - q_0) - 6(\dot{q}_k + \dot{q}_p)t_k - (\ddot{q}_p - \ddot{q}_k)t_k^2}{2t_k^5}, \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

### 5.3. Trajektoria liniowo-paraboliczna

Trajektorię w przestrzeni złączy można kształtować tak, by przemieszczanie (we współrzędnej wewnętrznej) było liniowe (ze stałą prędkością). Ruch taki polega to na rozpędzaniu danego złącza ze stałym dodatnim przyspieszeniem, następnie przyspieszenie przyjmie wartość zero (ruch ze stałą prędkością) by na końcu trajektorii ruch był hamowany ze stałym ujemnym przyspieszeniem. W ruchu tym mamy do czynienia z trapezowym profilem prędkości.



Rys. 45 Charakterystyka trapezowego profilu prędkości

$$\ddot{q}_l t_l = \frac{q_s - q_l}{t_s - t_l}. \quad (210)$$

$$q_l = q_0 + \frac{1}{2}\ddot{q}_l t_l^2. \quad (211)$$

Równania (210) oraz (211) możemy zapisać w następującej postaci:

$$\ddot{q}_l t_l^2 - \dot{q}_l t_k t_l + q_k - q_0 = 0. \quad (212)$$

Zwykle zakłada się znajomość maksymalnego przyspieszenia  $\ddot{q}_l$  i wtedy dla zadanych wartości  $q_0$ ,  $q_k$  oraz  $t_k$  możemy wyznaczyć czas  $t_l$  poruszania się po parabolicznym segmencie położenia. Z powyższego równania wynika, że czas ten

$$t_l = \frac{t_k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ddot{q}_l t_k^2 - 4(q_k - q_0)}{\ddot{q}_l}}, \quad (213)$$

przy czym  $t_l \leq t_k/2$ . Stąd w łatwy sposób można wyznaczyć wzór na ograniczenie przyspieszeń  $\ddot{q}_l$ , które w rozważanym przypadku ma postać:

$$|\ddot{q}_l| \geq \frac{4(q_k - q_0)}{t_k^2}. \quad (214)$$

Zwróćmy uwagę, że dla ograniczenia w postaci równości w powyższym wzorze trajektoria z rys. 45 składa się tylko z dwóch odcinków parabolicznych – rozpędzania i hamowania. Mówimy wtedy o profilu prędkości w postaci trójkąta.

Jeżeli założymy, że znane są  $q_0$ ,  $q_k$  oraz  $t_k$  (za tym idzie znajomość średniej prędkości ruchu), równanie (214) nakłada warunek na przyspieszenie  $\ddot{q}_l$ . Czas  $t_l$  obliczamy na podstawie wzoru (213), a trajektoria jest opisana zależnością:

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{1}{2}\ddot{q}_l t^2 & \text{dla } 0 \leq t \leq t_l, \\ q_0 + \dot{q}_l t_l (t - \frac{t_l}{2}) & \text{dla } t_l < t \leq t_k - t_l, \\ q_k - \frac{1}{2}\ddot{q}_l (t_k - t)^2 & \text{dla } t_k - t_l < t \leq t_k. \end{cases} \quad (215)$$

Wybór przyspieszenia ruchu po parabolicznym odcinku trajektorii nie jest jedynym sposobem wyznaczania trajektorii o trapezowym profilu prędkości. Zamiast  $\ddot{q}_l$  możemy określić prędkość ruchu  $\dot{q}_l$  przy przejściu z odcinka parabolicznego na liniowy. Podlega ona ograniczeniu o następującej postaci:

$$\frac{|q_k - q_0|}{t_k} < |\dot{q}_l| \leq \frac{2|q_k - q_0|}{t_k}. \quad (216)$$

Zauważwszy, że  $\dot{q}_l = \ddot{q}_l t_l$ , z równania (212) możemy obliczyć czas  $t_l$ :

$$t_l = \frac{q_0 - q_k + \dot{q}_l t_k}{\dot{q}_l}, \quad (217)$$

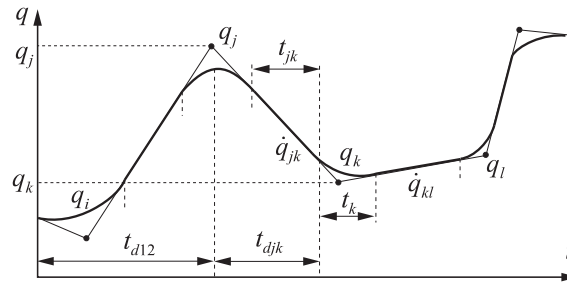
a stąd przyspieszenie:

$$\ddot{q}_l = \frac{\dot{q}_l^2}{q_0 - q_k + \dot{q}_l t_k}. \quad (218)$$

Ostatecznie biorąc pod uwagę wzory (217) oraz (218), możemy wyznaczyć wielomiany określone za pomocą wzoru (215).

#### 5.4. Trajektoria liniowo-paraboliczna z punktami pośrednimi

Trajektoria segmentami liniowa z odcinkami parabolicznymi przechodzi przez punkty pośrednie (ich liczba jest skończona) rys. 46.



Rys. 46 Trajektoria liniowa z odcinkami parabolicznymi – uogólnienie

Wartości współrzędnej uogólnionej w punktach  $j, k, l$  oznaczamy odpowiednio przez  $q_j, q_k, q_l$ . Oznaczenia na rys. 46 mają charakter lokalny. Czas pokonywania odcinka parabolicznego w otoczeniu punktu  $k$ -tego przez  $t_k$ , czas pokonywania części liniowej trajektorii pomiędzy punktami  $j$  oraz  $k$  przez  $t_{jk}$ , a czas pokonywania całego segmentu pomiędzy tymi punktami przez  $t_{dj k}$ . Prędkość ruchu liniowego z punktu  $j$  do  $k$  oznaczamy przez  $\dot{q}_{jk}$ , a przyspieszenie ruchu parabolicznego wokół punktu  $j$  przez  $\ddot{q}_j$ . Zakładamy, że znane są punkty pośrednie  $q_k$  trajektorii z rys. 46 oraz czasy przejścia pomiędzy punktami pośrednimi  $t_{dj k}$ . Ponadto założymy, że znane są wartości bezwzględne maksymalnych przyspieszeń  $|\ddot{q}_k|$ .

Biorąc teraz pod uwagę rys. 46 oraz powyższe rozważania, możemy zapisać zależności dla segmentu trajektorii pomiędzy punktami  $j$  oraz  $k$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_{jk} &= \frac{q_k - q_j}{t_{dj k}}, \\ \ddot{q}_k &= \text{sgn}(\dot{q}_{kl} - \dot{q}_{jk}) |\ddot{q}_k|, \\ t_k &= \frac{\dot{q}_{kl} - \dot{q}_{jk}}{\ddot{q}_k}, \\ t_{jk} &= t_{dj k} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k. \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

Według tych wzorów obliczenia wykonuje się dla wszystkich segmentów z wyjątkiem pierwszego i ostatniego, dla nich są one nieco inne. Dla pierwszego segmentu czas pokonywania odcinka parabolicznego musi być uwzględniony w całkowitym czasie pokonywania tego segmentu. Porównujemy wyrażenia opisujące prędkość na odcinkach liniowym i parabolicznym:

$$\frac{q_2 - q_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} = \ddot{q}_1 t_1 \quad (220)$$

i wyznaczamy czas  $t_1$ . Prędkość  $\dot{q}_{12}$  oraz czas  $t_{12}$  obliczymy z następującej sekwencji wzorów:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \operatorname{sgn}(q_2 - q_1) |\ddot{q}_1|, \\ t_1 &= t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(q_2 - q_1)}{\ddot{q}_1}}, \\ \dot{q}_{12} &= \frac{q_2 - q_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1}, \\ t_{12} &= t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2}t_2. \end{aligned} \right\} \quad (221)$$

W analogiczny sposób prowadzimy obliczenia dla ostatniego segmentu, łączącego punkty  $n - 1$  oraz  $n$ . Czas  $t_n$  obliczamy z zależności:

$$\frac{q_{n-1} - q_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n} = \ddot{q}_n t_n, \quad (222)$$

a pozostałe parametry wyznaczamy na podstawie następujących wzorów:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_n &= \operatorname{sgn}(q_{n-1} - q_n) |\ddot{q}_n|, \\ t_n &= t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \frac{2(q_n - q_{n-1})}{\ddot{q}_n}}, \\ \dot{q}_{(n-1)n} &= \frac{q_n - q_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n}, \\ t_{(n-1)n} &= t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2}t_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Z rysunku 46 wynika jasno, że trajektorie paraboliczne nie przechodzą przez wybrane punkty narzucone przez użytkownika. Równania zdefiniowane za pomocą wzorów (219)–(223) w pełni definiują zależności pomiędzy poszczególnymi punktami trajektorii, określają czasy trwania części parabolicznych oraz odpowiednie prędkości.

## 5.5. Wykorzystanie funkcji sklejanych

Funkcje sklejane są związane z reprezentacją współrzędnej uogólnionej  $q$  za pomocą kombinacji pewnych funkcji, tworzących bazę w odpowiedniej przestrzeni. Korzystniej będzie przedstawić  $q$  jako funkcję drogi przebytej  $s$ , a nie jako funkcję czasu  $t$ . Zmienna  $s$  jest zatem skalarem i zmienia się w przedziale  $0 \leq s \leq s_k$ , przy czym  $s_k > 0$  oznacza długość drogi. Z matematycznego punktu widzenia możemy współrzędną uogólnioną  $q(s)$  przedstawić w postaci następującego rozwinięcia:

$$q^M(s) = \sum_{j=0}^M c_j \varphi_j(s), \quad (224)$$

przy czym  $M$  jest parametrem określającym długość rozwinięcia, a funkcje  $\varphi_j(s)$  są funkcjami liniowo niezależnymi. Jest to inne spojrzenie na zagadnienie minimalizacji funkcjonału. Otóż chcemy, aby funkcje  $\varphi_j(s)$  wykazywały następujące właściwości. Należy dobrać taką ich kombinację liniową dla dowolnej funkcji  $q^M$ , aby wartości wskaźników  $W_1(q^M)$  oraz  $W_1(q)$  różniły się dowolnie mało. Rozwiązanie zadania sprowadza się zatem do znalezienia takich współczynników  $c_0, c_1 \dots c_M$ , aby dla danej bazy  $\{\varphi_j\}_{j=0}^M$  minimalizowały one wartość tego wyrażenia. Jest to zadanie optymalizacji statycznej, która może być rozwiązana jedną z metod wariacyjnych. W tym miejscu nie będziemy zajmować się aspektami numerycznymi rozwiązania. Pragniemy jednak zwrócić uwagę, iż takie podejście jest możliwe.

Przy okazji pokażemy, jak skonstruować różne układy ciągów liniowo niezależnych  $\varphi_j$ . W tym celu oznaczymy przez  $P$  podział przedziału  $\langle 0, s_k \rangle \in \mathbb{R}^1$  na  $M$  podprzedziałów o długości  $h = s_{j+1} - s_j$  każdy dla  $j = 0, 1, \dots, M - 1$ , gdzie „węzły” podziału  $s_j$  są takimi wartościami, że  $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_M = s_k$ . Załóżmy ponadto, że  $0 < r \leq M$ .

Dla  $r \geq 1$  określmy teraz przestrzeń liniową funkcji sklepanych  $S^r(P)$  porządku  $r$  względem podziału  $P$  jako zbiór takich funkcji  $\varphi : \langle 0, s_k \rangle \rightarrow \mathbb{R}^1$ , że

$$S^r(P) = \{ \varphi(s) : \varphi(s) \in C^{2r-2}(\langle 0, s_k \rangle, \mathbb{R}^1) \}$$

i  $\varphi(s)$  jest wielomianem stopnia  $2r - 1$  w każdym przedziale  $\langle s_i, s_{i+1} \rangle$  dla  $i = 1, 2, \dots, M$ . W ostatniej zależności  $C^{2r-2}$  oznacza klasę funkcji ciągłych wraz z jej pochodnymi do rzędu  $2r - 2$  włącznie, które są też funkcjami ciągłymi. Zauważmy, że elementy przestrzeni  $S^r(P)$  są funkcjami, które powstają ze „sklejenia” wielomianów stopnia  $2r - 1$  określonych na przedziałach  $\langle s_j, s_{j+1} \rangle$ . Rozpatrzmy teraz trzy wybrane rodzaje funkcji bazowych (nazwanych inaczej funkcjami podstawowymi):

- liniowe sklepane,
- sześciennie sklepane,
- trygonometryczne  $B$ -funkcje sklepane porządku trzy.

Oznaczmy przez  $S^1$  przestrzeń liniowych funkcji sklepanych, czyli przestrzeń funkcji ciągłych, odcinkami liniowych. Baza w przestrzeni  $S^1$  jest zdefiniowana jako ciąg funkcji

$\{\varphi_{L,j}\}_{j=0}^M$ , gdzie  $\varphi_{L,j}$  ma postać:

$$\varphi_{L,j}(s) = \begin{cases} \frac{s - s_{j-1}}{h} & \text{dla } s \in \langle s_{j-1}, s_j \rangle, \\ \frac{s_{j+1} - s}{h} & \text{dla } s \in \langle s_j, s_{j+1} \rangle, \\ 0 & \text{dla pozostałych } s, \end{cases} \quad (225)$$

przy czym zauważmy, że w punkcie  $s = s_j$  funkcja  $\varphi_{L,j}(s) = 1$ .

Oznaczmy teraz przez  $S^2$  przestrzeń sześciennych funkcji sklepanych, czyli funkcji ciągłych dwukrotnie różniczkowalnych, które powstały przez sklejenie wielomianów algebraicznych trzeciego stopnia. Baza w przestrzeni  $S^2$  jest zdefiniowana w postaci ciągu funkcji  $\{\varphi_{C,j}\}_{j=0}^M$ .



Wprowadzimy teraz następujące oznaczenie

$$\xi_j = \xi_j(s) = \frac{s - s_0 - jh}{h},$$

przy czym  $s \in \langle s_0, s_M \rangle$ . Wtedy funkcję podstawową  $\varphi_{C,j}$  zapiszemy jako

$$\varphi_{C,j}(s) = \begin{cases} \frac{(2 - \xi_i)^3}{6} - \frac{2(1 - \xi_i)^3}{3} - \xi_i^3 + \frac{2(1 + \xi_i)^3}{3} & \text{dla } \xi_i \in \langle -2, -1 \rangle, \\ & \text{tj. } s \in \langle s_{j-2}, s_{j-1} \rangle \\ \frac{(2 - \xi_i)^3}{6} - \frac{2(1 - \xi_i)^3}{3} - \xi_i^3 & \text{dla } \xi_i \in \langle -1, 0 \rangle, \\ & \text{tj. } s \in \langle s_{j-1}, s_j \rangle \\ \frac{(2 - \xi_i)^3}{6} - \frac{2(1 - \xi_i)^3}{3} & \text{dla } \xi_i \in \langle 0, 1 \rangle, \\ & \text{tj. } s \in \langle s_j, s_{j+1} \rangle \\ \frac{(2 - \xi_i)^3}{2} & \text{dla } \xi_i \in \langle 1, 2 \rangle, \\ & \text{tj. } s \in \langle s_{j+1}, s_{j+2} \rangle \\ 0 & \text{dla pozostałych } \xi_i \end{cases} \quad (226)$$

Zauważmy, że w punktach przejścia między przedziałami otrzymamy dokładnie takie same wartości. Ponadto funkcje określone za pomocą wzoru (226) można w łatwy sposób zróżniczkować, utrzymując ciągłość prędkości i przyspieszeń we wszystkich punktach, jeżeli skorzystamy ze wzoru (224).

Wreszcie oznaczmy przez  $T^r$  przestrzeń trygonometrycznych  $B$ -funkcji sklepanych porządku  $r$ . Dla każdego z przedziałów  $\langle s_j, s_{j+1} \rangle$  funkcje  $\varphi_{T,j}^1$  są określone następująco:

$$\varphi_{T,j}^1(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(h/2)} & \text{dla } s \in \langle s_j, s_{j+1} \rangle, \\ 0 & \text{dla pozostałych } s. \end{cases} \quad (227)$$

Niech teraz  $s_j < s_{j+1} < \dots < s_{j+r}$ , przy czym  $s_j < s_{j+r} < s_j + 2\pi$ . Wtedy  $\varphi_{T,j}^r(s)$  ( $r > 1$ ) możemy przedstawić w postaci następującej zależności rekurencyjnej:

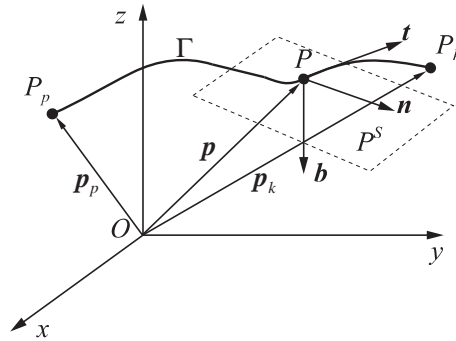
$$\varphi_{T,j}^r(s) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{s - s_j}{2}\right) \varphi_{T,j}^{r-1}(s) + \sin\left(\frac{s_{j+r} - s}{2}\right) \varphi_{T,j+1}^{r-1}(s)}{\sin\left(\frac{s_{j+r} - s_j}{2}\right)} & \text{dla } s \in \langle s_j, s_{j+r} \rangle, \\ 0 & \text{dla pozostałych } s. \end{cases} \quad (228)$$

Wybór bazy przeważnie zależy od konkretnego zadania.

## 6. Planowanie trajektorii w przestrzeni zewnętrznej

Zajmijmy się generowaniem trajektorii w przestrzeni zewnętrznej, czyli w przestrzeni kartezyjskiej. W związku z tym rozpatrzmy sytuację przedstawioną na rys. 47. Zaznaczono na

o65mm



Rys. 47 Trajektoria  $\Gamma$  w przestrzeni kartezjańskiej

nim trajektorię  $\Gamma$  o punkcie początkowym  $P_p$  i punkcie końcowym  $P_k$ , określonymi przez końce wektorów  $p_p$  i  $p_k$ . Podobnie jak w poprzednim rozdziale, przez  $s$  oznaczamy długość krzywej  $\Gamma$ , zatem dla punktu  $P_p$  długość  $s = 0$ . W związku z tym możemy zapisać, że

$$p = f(s). \tag{229}$$

Wzór ten określa trajektorię  $\Gamma$ , zapisaną za pomocą funkcji  $f(s)$ . Oznaczmy przez  $P$  punkt na krzywej  $\Gamma$ , odpowiadający zmiennej  $s$ . Prawie dla każdego, tzn. poza skończoną liczbą, punktu  $P$  należącego do trajektorii  $\Gamma$  możemy zdefiniować trzy jednostkowe wektory, które są związane z rozpatrywaną krzywą. Wektory orientacji są w pełni scharakteryzowane przez geometrię trajektorii, a ich kierunek zależy od kierunku wynikającego ze wzoru (229). Pierwszy z wektorów jednostkowych jest styczny do krzywej i oznaczamy go przez  $t$ . Jest on zorientowany wzdłuż trajektorii i określony przez kierunek zmian współrzędnej  $s$ .

Drugi wektor jednostkowy jest normalny i oznaczamy go przez  $n$ . Należy on do płaszczyzny ściśle stycznej i tworzy wraz z wektorem  $t$  układ prawoskrętny. Przypominamy, że płaszczyzna ściśle styczna to taka, która zawiera wcześniej zdefiniowany wektor  $t$  i punkt  $P' \in \Gamma$  taki, że  $P'$  dąży w granicy do punktu  $P$  wzdłuż krzywej  $\Gamma$ . Zwrot wektora  $n$  jest taki, że trajektoria  $\Gamma$  w otoczeniu punktu  $P$  względem płaszczyzny zawierającej wektor  $t$  oraz wektor do niego prostopadły  $n$  leży po tej samej stronie co wektor  $n$ .

Trzeci wektor jednostkowy jest prostopadły do dwóch wektorów zdefiniowanych wyżej i oznaczany przez  $b$ . Wektory jednostkowe  $t$ ,  $n$  oraz  $b$  tworzą układ prawoskrętny. Zwróćmy uwagę, że nie zawsze możemy zdefiniować taką trójkę wektorów. Wektory te zależą od geometrii trajektorii. W świetle powyższych rozważań możemy zapisać następujące wzory:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{\left\| \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right\|} \frac{d\mathbf{p}}{ds}, \\ n &= \frac{1}{\left\| \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} \right\|} \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2}, \\ b &= t \times n, \end{aligned} \right\} \tag{230}$$

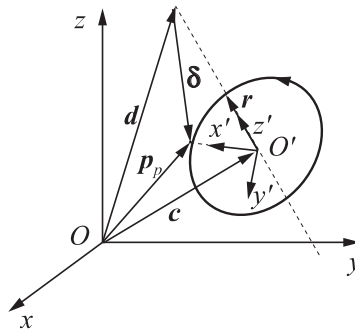
przy czym  $\| \cdot \|$  jest długością wektora.

### 6.1. Przykładowe trajektorie w przestrzeni zewnętrznej

Podamy dwa przykłady zastosowania tej konstrukcji trajektorii. Rozpatrzmy najprostszy przykład, tj. krzywą  $\Gamma$  jako odcinek liniowy pomiędzy punktami  $P_p$  oraz  $P_k$ . Z matematycznego punktu widzenia możemy wtedy zapisać:

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_p + \frac{s}{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p\|} (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p), \tag{231}$$

gdzie  $\mathbf{p}_p, \mathbf{p}_k$  są wektorami łączącymi punkty  $P_p, P_k$  z początkiem układu współrzędnych.



Rys. 48 Parametryczna reprezentacja okręgu w przestrzeni kartezjańskiej

Ponadto zauważmy, że jeśli  $s = 0$ , to mamy  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_p$ , a dla normy wektora  $\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p\|$  mamy:  $\mathbf{p}(\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p\|) = \mathbf{p}_k$ . Zatem możemy wnioskować, że kierunek poruszania się po trajektorii  $\Gamma$  jest od punktu  $P_p$  do  $P_k$ . Dwukrotne różniczkowanie zależności (231) względem parametru  $s$  prowadzi do następujących wzorów:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \frac{1}{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p\|} (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p), \\ \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \tag{232}$$

Ze wzorów tych wynika, że na podstawie geometrii krzywej danej wzorem (231) (w istocie jest to odcinek linii prostej pomiędzy punktami  $\mathbf{p}_p$  oraz  $\mathbf{p}_k$ ) nie można w sposób jednoznaczny określić trzech wektorów jednostkowych  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  oraz  $\mathbf{b}$ .

Przejdziemy teraz do analizy drugiego przykładu, który daje pozytywny wynik w tym sensie, że możemy wyznaczyć wektory jednostkowe  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  oraz  $\mathbf{b}$  na podstawie geometrii krzywej. Najprostszą sytuacją będzie, jeżeli założymy, że trajektoria  $\Gamma$  jest okręgiem w przestrzeni kartezjańskiej. Sytuację tę zobrazowano na rys. 48. Na rysunku tym przedstawiono okrąg oraz wektor  $\mathbf{p}_p$  wyznaczający punkt początkowy na tym okręgu. Strzałka na obwodzie koła oznacza kierunek zmian wartości parametru  $s$ , czyli długości okręgu. Pamiętajmy, że w każdym przypadku trzeba podać punkt początkowy krzywej oraz kierunek zmian parametru

$s$ . Układ współrzędnych  $xyz$  jest podstawowym układem współrzędnych. Przez środek koła przechodzi linia przerywana, która jest prostopadła do płaszczyzny koła. W środku koła zlokalizowano układ współrzędnych związanych z kołem. Oś  $z'$  leży na prostej prostopadłej do płaszczyzny koła. Z osią tą jest związany jednostkowy wektor  $r$ . Oś  $x'$  leży wzdłuż kierunku wyznaczonego przez punkt końcowy wektora  $p_p$  oraz punkt  $O'$  i należy do płaszczyzny koła. Oś  $y'$  uzupełnia układ do prawoskrętnego układu współrzędnych. Wektor  $c$  łączy punkty  $O$  i  $O'$ . Promień okręgu  $\rho$  można wyznaczyć jako długość wektora  $p_p - c$ , zatem  $\rho = \|p_p - c\|$ . Na rysunku 48 narysowano dodatkowo wektor  $d$ , który łączy punkt  $O$  z dowolnym punktem na osi prostopadłej do płaszczyzny koła. Dodatkowy wektor  $\delta$  wynika z prostej zależności geometrycznej:  $\delta = p_p - d$ . Wektor  $d$ , a co za tym idzie, wektor  $\delta$  zostały wprowadzone tak, aby okrąg nie redukował się w przestrzeni do jednego punktu. Warunek ten zapiszemy w następującej postaci:  $|\delta^T r| < \|\delta\|$ . Oznacza on, że wartość iloczynu skalarnego wektorów  $\delta$  oraz  $r$  powinna być zawsze mniejsza od długości samego wektora  $\delta$ . Jeżeli warunek ten jest spełniony, to możemy zapisać następującą zależność geometryczną:

$$c = d + (\delta^T r) r. \quad (233)$$

Ostatni wzór wyraża zależność określoną trójkątem wyznaczonym przez wektory  $c$ ,  $d$  oraz  $(\delta^T r)r$ . Oznacza on jednocześnie jednoznaczne umiejscowienie okręgu w przestrzeni kartezjańskiej  $xyz$ .

Zajmiemy się teraz parametryczną reprezentacją okręgu jako funkcji długości jego obwodu. Aby tego dokonać, posłużymy się dodatkowo układem współrzędnych wyznaczonym przez osie  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Zwróćmy uwagę, że prosta reprezentacja okręgu w tym układzie jest następująca:

$$p'(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (234)$$

Przypomnijmy, że  $\rho$  jest promieniem okręgu. Pierwsza współrzędna w wektorze  $p'(s)$  jest współrzędną  $x'$ , a druga jest współrzędną  $y'$ . Trzecia współrzędna jest zerowa. Oczywiście współrzędne te są określone w lokalnym układzie współrzędnych  $x'y'z'$ . Interesuje nas równanie tego okręgu w podstawowym układzie współrzędnych. Na podstawie rys. 48 możemy zapisać następującą zależność:

$$p(s) = c + R p'(s), \quad (235)$$

gdzie wektor  $c$  jest wyrażony w podstawowym układzie współrzędnych, a  $R$  jest macierzą orientacji układu  $x'y'z'$  względem układu  $xyz$ . Oczywiście macierz ta jest stała i można ją wyznaczyć w prosty sposób przez rzutowanie wektorów jednostkowych układu  $x'y'z'$  na osie układu  $xyz$ . Biorąc to pod uwagę, możemy wyznaczyć kolejne dwie pochodne wzoru (235)

względem  $s$ . Mamy zatem:

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\sin(s/\rho) \\ \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\cos(s/\rho)/\rho \\ -\sin(s/\rho)/\rho \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (236)$$

Z powyższego rozumowania wynika, że na podstawie geometrii okręgu możemy wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną równania tej krzywej wyrażonej względem parametru  $s$ , a co za tym idzie, posługując się wzorem (230), wyznaczmy dalej wektory  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  oraz  $\mathbf{b}$ .

## 6.2. Parametryczna reprezentacja trajektorii

Przedstawione wyżej przykłady wskazują, jak można parametrycznie kształtować trajektorie robota, i w konsekwencji, jak zdefiniować układ współrzędnych  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ . Przedstawione zadanie możemy sformułować w następujący sposób. Zakładamy, że funkcja  $\mathbf{p} = \mathbf{f}(s)$  jest parametryczną reprezentacją trajektorii  $\Gamma$  w przestrzeni kartezjańskiej. Wzdłuż tej krzywej przesuwa się środek narzędzia manipulatora. Podobnie jak poprzednio, z punktami początkowym i końcowym są związane wektory  $\mathbf{p}_p$  i  $\mathbf{p}_k$ . Parametr  $s$  zmienia się w ten sposób, że w chwili  $t = 0$  droga  $s = 0$  określa początek trajektorii, a dla  $t = t_k$  (czyli na końcu trajektorii)  $s = s_k$ , przy czym  $s_k$  jest długością okręgu. Funkcja  $s(t)$  określa, w jaki sposób należy zmieniać  $s$  jako funkcję czasu wzdłuż trajektorii.

Z analitycznego punktu widzenia  $s(t)$  może być dowolną funkcją, którą użytkownik „nakłada” na trajektorię. Może to być np. wielomian trzeciego stopnia względem czasu  $t$  albo przebieg składający się z wielomianów sklepanych, omówionych w poprzednim rozdziale. Rozpatrzmy teraz, jak zmienia się prędkość wektora  $\mathbf{p}$  w funkcji czasu. Formalne różniczkowanie prowadzi do następującego wzoru

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{s} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \dot{s} \mathbf{t}, \quad (237)$$

przy czym zauważmy, że  $\mathbf{t}$  jest wektorem stycznym do trajektorii (por. też wzór (230)). Wzór (237) ma stosunkowo prostą interpretację geometryczną. Wektor  $\mathbf{t}$  jest wektorem jednostkowym, a  $\dot{s}$  jest amplitudą wektora prędkości  $\dot{\mathbf{p}}$ . Prędkość ta zmienia się od zera dla  $t = 0$  według kształtu zaproponowanego przez użytkownika, który tak planuje trajektorię, aby dla  $t = t_k$  osiągnąć ponownie wartość zero. Zatem  $\dot{s}$  jest funkcją kształtującą wartość amplitudy prędkości wzdłuż trajektorii  $\Gamma$ . Koncepcja ta pozwala nam na planowanie trajektorii w przypadku ogólnym. Dla przykładu jeśli weźmiemy wzór (231), to jego dwukrotne różniczkowanie zgodnie z opisaną wyżej zasadą prowadzi do następujących zależności:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \frac{\dot{s}}{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p\|} (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p) = \dot{s} \mathbf{t}, \\ \ddot{\mathbf{p}} &= \frac{\ddot{s}}{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p\|} (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p) = \ddot{s} \mathbf{t}. \end{aligned} \right\} \quad (238)$$

Uzyskaliśmy w ten sposób opis zmian prędkości i przyspieszenia wektora  $\mathbf{p}$  wzdłuż trajektorii.

W analogiczny sposób dla przypadku ruchu po okręgu otrzymamy następujące wzory na prędkość i przyspieszenie:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\dot{s} \sin(s/\rho) \\ \dot{s} \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{s} \mathbf{t}, \\ \ddot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\dot{s}^2 \cos(s/\rho)/\rho - \ddot{s} \sin(s/\rho) \\ -\dot{s}^2 \sin(s/\rho)/\rho + \ddot{s} \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix} = \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s}^2 \mathbf{n}. \end{aligned} \right\} \quad (239)$$

Jeżeli porównamy ostatni wzór ze wzorem (236), to możemy stwierdzić, że wektor prędkości  $\dot{\mathbf{p}}$  jest wyrażony przez wektor styczny  $\mathbf{t}$  wraz z amplitudą określoną przez  $\dot{s}$ . Przyspieszenie występujące we wzorze (234) składa się z dwóch składników: pierwszy z nich określa przyspieszenie styczne do krzywej, a drugi jest przyspieszeniem dośrodkowym. Składniki tego przyspieszenia są znane z prostych zależności mechaniki analitycznej dotyczących ruchu po okręgu. Z powyższego rozumowania wynika, że możemy dowolnie kształtować profil zmian wektora  $\mathbf{p}$  wzdłuż trajektorii wraz z odpowiednim profilem prędkości i przyspieszenia. Jesteśmy w ten sposób niezależni od geometrii krzywej w tym sensie, że wektory  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  oraz  $\mathbf{b}$  można zawsze określić.

### 6.3. Planowanie trajektorii w kontekście planowania zadań

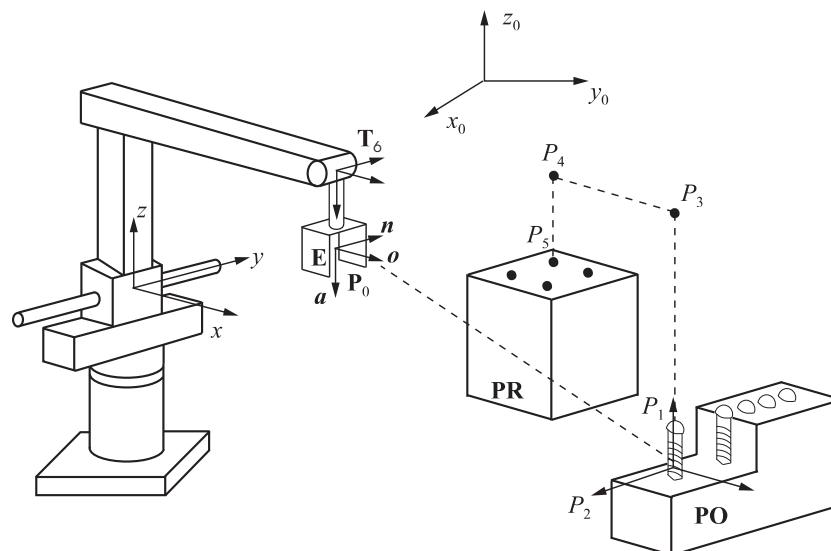
Pokażemy teraz, jak powyższe wzory mogą być zastosowane do planowania trajektorii w kontekście planowania zadań robota. Zadanie wyrazimy przez odpowiednią sekwencję macierzy przekształcenia jednorodnego. W tym celu w przestrzeni kartezjańskiej, w której działa robot, wyznaczamy pewne punkty charakteryzujące wykonywane zadanie, przy czym manipulator ma się poruszać wzdłuż linii prostej pomiędzy punktami w powiązaniu z dwoma rotacjami, tak aby był możliwy ruch pomiędzy tymi punktami z zadaną orientacją. Sekwencja obrotów jest następująca. Pierwszy jest obrotem wokół wektora jednostkowego o taki kąt, by spowodować obrót końcówki manipulatora lub narzędzia zgodnie z zadanym kątem zbliżenia. Drugi obrót jest obrotem wokół osi narzędzia w celu uzyskania jego właściwej orientacji.

Przejdziemy teraz do szczegółowej analizy tak postawionego zadania. W tym celu zapiszemy następujące równanie wyrażone za pomocą macierzy przekształcenia jednorodnego, związanej z wykonywanym zadaniem. Podstawowe równanie ma następującą postać:

$$\mathbf{T}_6^0 \mathbf{T}_{\text{narz}}^6 = \mathbf{C}_{\text{pod}}^0(t) \mathbf{P}_{\text{przed}}^{\text{pod}}. \quad (240)$$

W powyższym wzorze występują cztery macierze przekształcenia jednorodnego. Pierwsza z nich to macierz  $T_6^0$ , która określa położenie oraz orientację końcówki manipulatora względem podstawowego układu współrzędnych. Oczywiście zarówno ta macierz, jak i pozostałe ma wymiar  $4 \times 4$ . Jak wiadomo, do końcówki manipulatora jest przyłączone narzędzie. Położenie narzędzia względem końcówki manipulatora określa macierz  $T_{narz}^6$ . Jest to macierz najczęściej związana ze środkiem narzędzia. Z kolei macierz  $C_{pod}^0(t)$  jest funkcją czasu opisującą położenie i orientację układu, w którym jest wykonywany fragment zadania (tzw. aktualny układ pracujący), względem podstawowego układu współrzędnych. Zwróćmy uwagę, że w rozważanym ogólnym przypadku układ związany z podstawą manipulatora nie jest identyczny z podstawowym układem odniesienia. Wreszcie macierz  $P_{przed}^{pod}$  przedstawia położenie i orientację, w jakich przedmiot ma być uchwycony względem poprzednio zdefiniowanego układu współrzędnych. Macierze przekształcenia jednorodnego nazywa się też często *ramkami*, o czym będzie mowa w następnym rozdziale.

Aby lepiej zaobserwować sytuację opisaną za pomocą równania (240), rozpatrzmy zadanie polegające na umiejscowieniu śrub w pojemniku. Przedstawiono to rys. 49, przy czym układ podstawy manipulatora nie jest zgodny z podstawowym układem współrzędnych, w którym jest zdefiniowane konkretne zadanie. Na rysunku tym zaznaczono ramkę  $T_6$ , która wynika z zadania prostego kinematyki. Wielkość  $E$  jest ramką związaną z narzędziem, a dokładniej z jego środkiem. Często występuje sytuacja, w której macierz  $T_{narz}^6$  jest częścią macierzy przekształcenia jednorodnego  $T_6^0$ . Wtedy macierz  $T_{narz}^6$  jest po prostu macierzą jednostkową. Macierz  $C_{pod}^0(t)$  określa zależność pomiędzy dwoma układami – podstawowym układem odniesienia oraz układem pracującym. Gdy oba te układy się pokrywają, macierz  $C_{pod}^0$  jest macierzą jednostkową. Pozostałe oznaczenia z rys. 49 będą objaśnione w dalszej części podrozdziału przy analizie samego przykładu.



Rys. 49 Proste zadanie paletyzacji

Przejdziemy teraz do interpretacji równania (240). Lewa strona tego równania przedstawia położenie i orientację środka uchwytu narzędzia manipulatora, a prawa położenie i orientację

detalu (obiektu), który ma być uchwycony przez manipulator. Lewa strona równania (240) może być interpretowana jako część związana z manipulatorem, a prawa jako część związana z detalem. W momencie wykonywania zadania obie części powinny się nałożyć, tj. powinna być równość. Jest to podstawowe równanie macierzowe opisujące sytuację uchwycenia przedmiotu przez manipulator. Dlatego z tego równania obliczymy macierz  $\mathbf{T}_6^0$ , która opisuje położenie i orientację manipulatora wymagane dla uchwycenia detalu przez manipulator we właściwy sposób. Z zapisu macierzy  $\mathbf{T}_6^0$  wynika jednocześnie, że rozpatrywany manipulator ma sześć stopni swobody, co nie jest jakimkolwiek ograniczeniem w rozpatrywanym przypadku. Oczywiście manipulator może mieć więcej niż sześć stopni swobody, ale pociąga to za sobą występowanie redundancji. Większość robotów przemysłowych ma sześć stopni swobody i to wystarcza do wykonania zadania planowania trajektorii w przestrzeni kartezyjskiej w obszarze roboczym robota. Rozwiązanie równania (240) ze względu na  $\mathbf{T}_6^0$  pozwala nam zapisać następującą zależność:

$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{C}_{\text{pod}}^0(t) \mathbf{P}_{\text{przed}}^{\text{pod}} \mathbf{R} (\mathbf{T}_{\text{narz}}^6)^{-1}. \quad (241)$$

Aby wykonać określone zadanie, trzeba zatem wyznaczyć macierz  $\mathbf{T}_6^0$  z odpowiednio dużą częstością, a następnie korzystając z algorytmu kinematyki odwrotnej, obliczyć współrzędne uogólnione, które pozwolą na odtworzenie zadanej trajektorii.

Postąpimy teraz w następujący sposób. Założymy, że wykonywane zadanie jest opisane za pomocą  $K$  charakterystycznych punktów (patrz: rys. 49) w przestrzeni kartezyjskiej, w których powinien się znaleźć manipulator. Wtedy korzystając z równania (240), możemy zapisać następujące zależności:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_6^0 (\mathbf{T}_{\text{narz}}^6)_1 &= \left( \mathbf{C}_{\text{pod}}^0(t) \right)_1 \left( \mathbf{P}_{\text{przed}}^{\text{pod}} \right)_1, \\ \mathbf{T}_6^0 (\mathbf{T}_{\text{narz}}^6)_2 &= \left( \mathbf{C}_{\text{pod}}^0(t) \right)_2 \left( \mathbf{P}_{\text{przed}}^{\text{pod}} \right)_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{T}_6^0 (\mathbf{T}_{\text{narz}}^6)_K &= \left( \mathbf{C}_{\text{pod}}^0(t) \right)_K \left( \mathbf{P}_{\text{przed}}^{\text{pod}} \right)_K. \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

Powyższe równania możemy zapisać też w prostszej postaci:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_6^{\text{narz}} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{C}_1(t) \mathbf{P}_1, \\ \mathbf{T}_6^{\text{narz}} \mathbf{T}_2 &= \mathbf{C}_2(t) \mathbf{P}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{T}_6^{\text{narz}} \mathbf{T}_K &= \mathbf{C}_K(t) \mathbf{P}_K. \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

Dla przykładu z rys. 49 punkty charakterystyczne zostały oznaczone jako  $P_1, P_2, P_3, P_4$  i  $P_5$ . Manipulator powinien się w nich znaleźć celem umieszczenia śruby w części o nazwie PR, mającej kształt prostopadłościanu. Liniami przerywanymi oznaczono przejście pomiędzy poszczególnymi charakterystycznymi punktami. Dla przykładu z rys. 49 równania te



przyjmą postać:

$$\text{w punkcie } P_0: \mathbf{POD} \cdot \mathbf{T}_6 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{POCZ} \cdot \mathbf{P}_0, \quad (244)$$

$$\text{w punkcie } P_1: \mathbf{POD} \cdot \mathbf{T}_6 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{PO} \cdot \mathbf{P}_1, \quad (245)$$

$$\text{w punkcie } P_2: \mathbf{POD} \cdot \mathbf{T}_6 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{PO} \cdot \mathbf{P}_2, \quad (246)$$

$$\text{w punkcie } P_3: \mathbf{POD} \cdot \mathbf{T}_6 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{PO} \cdot \mathbf{P}_3, \quad (247)$$

$$\text{w punkcie } P_4: \mathbf{POD} \cdot \mathbf{T}_6 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{PR} \cdot \mathbf{P}_4, \quad (248)$$

$$\text{w punkcie } P_5: \mathbf{POD} \cdot \mathbf{T}_6 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{PR} \cdot \mathbf{P}_5. \quad (249)$$

W równaniach (244)–(249) występują ramki  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_5$  opisujące położenie i orientację chwytaka w punktach trajektorii  $P_0, \dots, P_5$ . Ponadto  $\mathbf{POD}$  oznacza ramkę związaną z podstawą manipulatora względem podstawowego układu współrzędnych. Ramki:  $\mathbf{POCZ}$  (początkowa),  $\mathbf{PR}$  (związana z prostopadłościanem) oraz  $\mathbf{PO}$  (związana z pudełkiem ze śrubami) są wyrażone w podstawowym układzie współrzędnych. Ramka  $\mathbf{T}_6$  jest wyrażona podobnie. Ramka  $\mathbf{POCZ}$  jest pewną ramką początkową umożliwiającą zdefiniowanie zadania umiejscowienia śrub w prostopadłościanie. W zależnościach (244)–(249) użyto dużych liter na oznaczenie ramek. Jest to zgodne z zapisem przyjętym w literaturze robotycznej. Równania powyższe możemy traktować jako wybrane relacje pomiędzy ramkami w pewnych charakterystycznych punktach sceny, w których jest określone zadanie.

Przejdziemy teraz do dalszej analizy wzorów (243). Po pierwsze, zauważmy, że z położenia i orientacji wyznaczonych poprzez iloczyn  $\mathbf{C}_i(t)\mathbf{P}_i$  możemy wyznaczyć odległość pomiędzy sąsiednimi wybranymi punktami, za pomocą których jest zdefiniowane zadanie. Jeżeli ponadto są znane prędkości liniowe i kątowe wzdłuż linii łączących sąsiednie punkty, to możemy wyznaczyć czasy przejścia  $t_i$  od wybranego połączenia  $i$ -tego do  $(i + 1)$ -szego. Zauważmy ponadto, że samo narzędzie oraz ramka  $\mathbf{C}$  są zdefiniowane w punktach związanych z zadaniem, które z kolei są wyrażone względem podstawowego układu współrzędnych. Przejście od jednego wybranego punktu do sąsiedniego punktu lepiej opisać w ten sposób, że zarówno wybrane ramki położenia, jak i ramki narzędzia powinny być wyrażone względem położenia docelowego (innymi słowy, narzędzie i ramka  $\mathbf{C}$  mogą być dowolnie zdefiniowane pomiędzy wybranymi punktami). Zaletą takiej reprezentacji polega na tym, że narzędzie pozostaje nieruchome względem układu współrzędnych związanego z ramką  $\mathbf{C}$ . Dlatego możemy teraz przeddefiniować zadanie w ten sposób, że ramkę związaną z aktualnym, wybranym punktem oraz ramkę narzędzia przeliczymy względem następnego punktu. Aby tego dokonać, będziemy opisywać ramkę za pomocą dwóch wskaźników  $i$  oraz  $j$ , mamy zatem  $\mathbf{P}_{ij}$ . Ostatni zapis przedstawia ramkę  $\mathbf{P}_i$  wyznaczoną względem  $j$ -tego układu współrzędnych. Na przykład, jeżeli chcemy przesunąć manipulator z wybranego położenia 1 do położenia 2, to w tym wybranym położeniu wyrażonym w jego własnym układzie współrzędnych zachodzi następująca relacja:

$$\mathbf{T}_6^{\text{narz}}\mathbf{T}_1 = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{P}_{11}. \quad (250)$$

Natomiast jeżeli położenie 1 wyrazimy względem układu współrzędnych związanego z

punktem 2, to mamy:

$$\mathbf{T}_6^{\text{narz}} \mathbf{T}_2 = \mathbf{C}_2(t) \mathbf{P}_{12}. \quad (251)$$

Z dwóch ostatnich równań obliczymy teraz  $\mathbf{P}_{12}$ . Otrzymamy wtedy równanie:

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{C}_2^{-1}(t) \mathbf{C}_1(t) \mathbf{P}_{11} (\mathbf{T}_1^{\text{narz}})^{-1} \mathbf{T}_2^{\text{narz}}, \quad (252)$$

które pozwala nam wyrazić  $\mathbf{P}_{12}$  przy założeniu, że  $\mathbf{P}_{11}$  jest znane. Dlatego ruch pomiędzy dwoma kolejnymi punktami  $i$  oraz  $i + 1$  jest wyrażony przez następujące równanie:

$$\mathbf{T}_6 = \mathbf{C}_{i+1}(t) \mathbf{P}_{i,i+1} (\mathbf{T}_{i+1}^{\text{narz}})^{-1}, \quad (253)$$

$$\mathbf{T}_6 = \mathbf{C}_{i+1}(t) \mathbf{P}_{i+1,i+1} (\mathbf{T}_{i+1}^{\text{narz}})^{-1}, \quad (254)$$

przy czym  $\mathbf{P}_{i,i+1}$  oraz  $\mathbf{P}_{i+1,i+1}$  są transformatami przekształcenia jednorodnego zdefiniowanymi wyżej. Ruch wyraża się przez równania (253) oraz (254) w sensie macierzy przekształcenia jednorodnego manipulatora  $\mathbf{T}_6$  związanego z przejściem od punktu  $i$  do  $i + 1$ . Zaprezentujemy teraz odpowiednie macierze  $\mathbf{P}_{ij}$ , które są związane z przykładem z rys. 49. Aby dokonać przejścia od  $P_0$  do  $P_1$ , skorzystamy z podwójnego indeksu związanego z ramką  $\mathbf{P}$ , tak by wyznaczyć równanie (244) względem układu współrzędnych  $\mathbf{P}_1$ . Na podstawie równania (244) możemy zapisać:

$$\mathbf{T}_6 = (\mathbf{POD})^{-1} \cdot \mathbf{POCZ} \cdot \mathbf{P}_{00} \cdot \mathbf{E}^{-1}. \quad (255)$$

Jeżeli to samo równanie wyrazimy teraz względem układu współrzędnych związanego z  $P_1$ , to mamy:

$$\mathbf{T}_6 = (\mathbf{POD})^{-1} \cdot \mathbf{PO} \cdot \mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{E}^{-1}. \quad (256)$$

Porównamy stronami równania (255) i (256) i obliczymy na ich podstawie macierz  $\mathbf{P}_{01}$ , która w rozważanym przypadku ma postać:

$$\mathbf{P}_{01} = (\mathbf{PO})^{-1} \cdot \mathbf{POCZ} \cdot \mathbf{P}_{00}. \quad (257)$$

Przejście od punktu  $P_0$  do  $P_1$  wzdłuż linii prostej jest związane z następującymi zmianami konfiguracji manipulatora:

$$\mathbf{T}_6 = (\mathbf{POD})^{-1} \cdot \mathbf{PO} \cdot \mathbf{P}_{01} \cdot \mathbf{E}^{-1}, \quad (258)$$

$$\mathbf{T}_6 = (\mathbf{POD})^{-1} \cdot \mathbf{PO} \cdot \mathbf{P}_{11} \cdot \mathbf{E}^{-1}. \quad (259)$$

Sekwencja równań (258) oraz (259) pokazuje, jak zmienić macierz  $\mathbf{T}_6$  w związku z przejściem od punktu  $P_0$  do punktu  $P_1$ . Są to równania o postaci zgodnej z równaniami (253) oraz (254) i angażują one macierze  $\mathbf{P}_{01}$  oraz  $\mathbf{P}_{11}$  wyznaczone wcześniej w procesie planowania zadania. Oczywiście wynikowe równania określają macierze  $\mathbf{T}_6$ , które po zastosowaniu algorytmu kinematyki odwrotnej pozwolą na wyznaczenie odpowiednich współrzędnych uogólnionych. Przejście pomiędzy punktami  $\mathbf{P}_i$  oraz  $\mathbf{P}_{i+1}$  dla  $i = 1, \dots, 5$  możemy zrealizować w sposób podobny do opisanego wyżej.

Teraz przedstawimy schemat obliczeniowy zaproponowany przez Paula. Polega on na obliczeniach położenia oraz rotacji wokół ustalonej osi w przestrzeni kartezjańskiej uzupełnionych o obrót względem osi narzędzia, tak aby uzyskać liniowe zmiany przemieszczeń oraz prędkości kątowej końcówki manipulatora. Jak już wspomniano, pierwszy obrót jest związany z naprowadzeniem robota na żądany kierunek zbliżenia, a drugi jest związany z wektorem orientacji wokół osi narzędzia.

Ruch pomiędzy położeniami  $i$  oraz  $i + 1$  przedstawimy zgodnie ze wzorem (253), który uzupełnimy o macierz  $\mathbf{D}(\lambda)$ :

$$\mathbf{T}_6(\lambda) = \mathbf{C}_{i+1}(\lambda)\mathbf{P}_{i,i+1}\mathbf{D}(\lambda) (\mathbf{T}_{i+1}^{\text{narz}})^{-1}, \quad (260)$$

przy czym  $\lambda = t/t_k$ ,  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ , gdzie  $t_k$  jest czasem trwania ruchu pomiędzy punktami  $i$  oraz  $i + 1$ . Koncepcja macierzy  $\mathbf{D}(\lambda)$  jest następująca: w położeniu  $i$ -tym, gdzie  $\lambda = 0$ ,  $\mathbf{D}(0)$  jest macierzą jednostkową o wymiarach  $4 \times 4$ . Ponadto mamy:

$$\mathbf{P}_{i+1,i+1} = \mathbf{P}_{i,i+1}\mathbf{D}(1), \quad (261)$$

a stąd wyznaczmy  $\mathbf{D}(1)$ :

$$\mathbf{D}(1) = (\mathbf{P}_{i,i+1})^{-1} \mathbf{P}_{i+1,i+1}. \quad (262)$$

Wziąwszy teraz pod uwagę następujące oznaczenia:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_{i,i+1} \triangleq \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}_A & \mathbf{o}_A & \mathbf{a}_A & \mathbf{p}_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{i+1,i+1} \triangleq \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}_B & \mathbf{o}_B & \mathbf{a}_B & \mathbf{p}_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

macierz  $\mathbf{D}(1)$  obliczymy zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{D}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_A^T \mathbf{n}_B & \mathbf{n}_A^T \mathbf{o}_B & \mathbf{n}_A^T \mathbf{a}_B & \mathbf{n}_A^T (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ \mathbf{o}_A^T \mathbf{n}_B & \mathbf{o}_A^T \mathbf{o}_B & \mathbf{o}_A^T \mathbf{a}_B & \mathbf{o}_A^T (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ \mathbf{a}_A^T \mathbf{n}_B & \mathbf{a}_A^T \mathbf{o}_B & \mathbf{a}_A^T \mathbf{a}_B & \mathbf{a}_A^T (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (264)$$

Problem sprowadza się teraz do efektywnego sposobu reprezentacji macierzy  $\mathbf{D}(1)$  dla odtworzenia ruchu liniowego pomiędzy punktami  $i$  oraz  $i + 1$ . Zgodnie z powyższymi założeniami chcemy, aby ruch był wynikiem liniowego przemieszczenia oraz kątowego liniowego przemieszczenia dwóch kątów w ten sposób, aby wszystkie trzy wielkości były proporcjonalne do  $\lambda$ . Jeżeli teraz  $\lambda$  zmienia się liniowo z czasem, to  $\mathbf{D}(\lambda)$  będzie odpowiadać liniowym zmianom prędkości oraz liniowej zmianie dwóch prędkości kątowych. Założymy, że pomiędzy punktem  $P_i$  a  $P_{i+1}$  jest liniowa zmiana przemieszczenia, z którą jest związana

macierz przekształcenia jednorodnego  $\mathbf{L}(\lambda)$ . Pierwszy obrót jest związany z nałożeniem wektora zbliżenia  $\mathbf{a}_A$  na wektor  $\mathbf{a}_B$  i z tym jest związana macierz rotacji  $\mathbf{R}_A(\lambda)$ . Drugi obrót jest związany z obrotem wektora orientacji  $\mathbf{o}_A$  wokół osi narzędzia tak, aby otrzymać wektor  $\mathbf{o}_B$ . Z tą drugą rotacją jest związana macierz  $\mathbf{R}_B(\lambda)$ . Mamy zatem następującą reprezentację macierzy  $\mathbf{D}(\lambda)$ :

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{R}_A(\lambda)\mathbf{R}_B(\lambda), \quad (265)$$

przy czym

$$\mathbf{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_x \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_y \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (266)$$

$$\mathbf{R}_A(\lambda) = \begin{bmatrix} \sin^2 \psi (1 - \cos(\lambda\theta)) + \cos(\lambda\theta) & -\sin \psi \cos \psi (1 - \cos(\lambda\theta)) \\ -\sin \psi \cos \psi (1 - \cos(\lambda\theta)) & \cos^2 \psi (1 - \cos(\lambda\theta)) + \cos(\lambda\theta) \\ -\cos \psi \sin(\lambda\theta) & -\sin \psi \sin(\lambda\theta) \\ 0 & 0 \\ \cos \psi \sin(\lambda\theta) & 0 \\ \sin \psi \sin(\lambda\theta) & 0 \\ \cos(\lambda\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (267)$$

$$\mathbf{R}_B(\lambda) = \begin{bmatrix} \cos(\lambda\phi) & -\sin(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\lambda\phi) & \cos(\lambda\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (268)$$

Wzór (267) wynika ze wzoru na obrót uogólniony, jeżeli założymy, że osią obrotu  $\mathbf{k}$  jest wektor  $\mathbf{y}$  macierzy przekształcenia jednorodnego o kąt  $\psi$  wokół osi  $z$ . W związku z tym oś obrotu  $\mathbf{k}$  ma współrzędne  $[-\sin \psi, \cos \psi, 0]$ . Jeżeli podstawimy współrzędne tego wektora do wzoru na obrót uogólniony, to otrzymamy wzór (267). Wzór (268) opisuje obrót o kąt  $\lambda\phi$  wokół wektora  $\mathbf{a}$  układu  $\mathbf{P}_{i+1}$ . Jeżeli teraz wykonamy mnożenie występujące we wzorze (265), korzystając z definicji (266)–(268), to otrzymamy następujący wzór:

$$\mathbf{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_n & \mathbf{d}_o & \mathbf{d}_a & \mathbf{d}_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (269)$$

przy czym

$$\mathbf{d}_o = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda\phi) [\sin^2 \psi (1 - \cos(\lambda\theta)) + \cos(\lambda\theta)] + \\ + \cos(\lambda\phi) [-\sin \psi \cos \psi (1 - \cos(\lambda\theta))] \\ -\sin(\lambda\phi) [-\sin \psi \cos \psi (1 - \cos(\lambda\theta))] + \\ + \cos(\lambda\theta) [\cos^2 \psi (1 - \cos(\lambda\theta)) + \cos(\lambda\theta)] \\ -\sin(\lambda\phi) [-\cos \psi \sin(\lambda\theta) + \cos(\lambda\theta) - \sin \psi \sin(\lambda\theta)] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_a = \begin{bmatrix} \cos \psi \sin(\lambda\theta) \\ \sin \psi \sin(\lambda\theta) \\ \cos(\lambda\theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_p = \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_o \times \mathbf{d}_a.$$

Na podstawie równania (265) możemy teraz znaleźć wszystkie składowe wektora położenia  $x, y, z$  oraz wszystkie kąty  $\psi, \theta, \phi$ . Aby znaleźć elementy  $x, y, z$ , mnożymy równanie (265) prawostronnie przez macierz  $\mathbf{R}_B^{-1}(\lambda)$  oraz  $\mathbf{R}_A^{-1}(\lambda)$  i porównujemy odpowiednie elementy wektora położenia. W wyniku tego porównania otrzymujemy następujące współrzędne wektora położenia

$$\left. \begin{aligned} x &= \mathbf{n}_A^T (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A), \\ y &= \mathbf{o}_A^T (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A), \\ z &= \mathbf{a}_A^T (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A). \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

Rozwiązanie ze względu na zmienne  $\psi$  oraz  $\theta$  sprowadza się do przemnożenia równania (265) prawostronnie przez  $\mathbf{R}_B^{-1}(\lambda)$ , a następnie przemnożenia lewostronnie przez  $\mathbf{L}^{-1}(\lambda)$  i przyrównania elementów trzeciej kolumny otrzymanego wyniku. Otrzymamy wtedy:

$$\psi = \arctg \left( \frac{\mathbf{o}_A^T \mathbf{a}_B}{\mathbf{n}_A^T \mathbf{a}_B} \right), \quad -\pi \leq \psi < \pi, \quad (271)$$

$$\theta = \arctg \left( \frac{\sqrt{(\mathbf{n}_A^T \mathbf{a}_B)^2 + (\mathbf{o}_A^T \mathbf{a}_B)^2}}{\mathbf{a}_A^T \mathbf{a}_B} \right), \quad 0 \leq \theta < \pi. \quad (272)$$

Aby wyznaczyć  $\phi$ , mnożymy obie strony równania (265): lewostronnie przez  $\mathbf{L}^{-1}(\lambda)$ , a prawostronnie przez  $\mathbf{R}_A^{-1}(\lambda)$  i następnie porównujemy elementy o współrzędnych (2, 1) i (2, 2) tak otrzymanego równania. Mamy wtedy:

$$\phi = \arctg \left( \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \right), \quad -\pi \leq \phi < \pi, \quad (273)$$

przy czym

$$\begin{aligned}\sin \phi &= -\sin \psi \cos \psi [1 - \cos(\lambda\theta)] (\mathbf{n}_A^T \mathbf{n}_B) + [\cos^2 \psi (1 - \cos(\lambda\theta)) + \\ &\quad + \cos(\lambda\theta)] (\mathbf{o}_A^T \mathbf{o}_B) - \sin \psi \sin(\lambda\theta) (\mathbf{n}_A^T \mathbf{n}_B), \\ \cos \phi &= -\sin \psi \cos \psi [1 - \cos(\lambda\theta)] (\mathbf{n}_A^T \mathbf{o}_B) + [\cos^2 \psi (1 - \cos(\lambda\theta)) + \\ &\quad + \cos(\lambda\theta)] (\mathbf{o}_A^T \mathbf{o}_B) - \sin \psi \cos(\lambda\theta) (\mathbf{a}_A^T \mathbf{o}_B).\end{aligned}$$

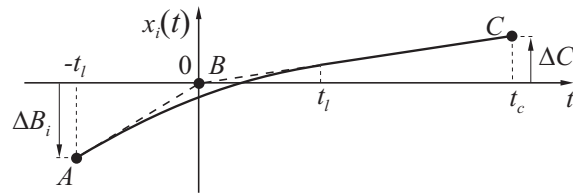
Z powyższego rozumowania wynika, że obliczenia związane z pełną reprezentacją orientacji w macierzy przekształcenia jednorodnego są bardzo skomplikowane. Technika związana ze znajdowaniem nieznanymi współrzędnych liniowych i kątowych jest podobna do tej, którą stosuje się w zadaniu odwrotnym kinematyki. Przedstawione obliczenia stanowią alternatywę do zaprezentowanych wcześniej w tym podrozdziale obliczeń dla minimalnej reprezentacji orientacji. Podsumowując obliczenia oparte na pełnej reprezentacji, możemy stwierdzić, że aby ich dokonać od punktu  $P_i$  do  $P_{i+1}$ , wyznaczamy funkcję  $D(\lambda)$  na podstawie wzoru (265) oraz wszystkich wzorów wynikających z tej reprezentacji, tj. wzorów (266)–(273), a następnie wyznaczamy macierz  $T_6$  na podstawie równania (260) i przez zastosowanie algorytmu kinematyki odwrotnej obliczymy odpowiadające macierzy  $T_6$  współrzędne uogólnione.

#### 6.4. Trajektoria liniowo-paraboliczna w przestrzeni zewnętrznej

Przedstawimy teraz kilka uwag o kształtowaniu trajektorii, która jest określona przez wektor  $\mathbf{x}$ , opisujący położenie i orientację w przestrzeni kartezjańskiej, oraz jego dwie pochodne względem czasu. Wektory te mają postać:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}. \quad (274)$$

Dotychczas zakładaliśmy, że współrzędne wektora  $\mathbf{x}$  zmieniają się w sposób liniowy. Jak już wspomniano przy planowaniu trajektorii w przestrzeni złączy, w celu uniknięcia nieciągłości prędkości w punktach pośrednich pomiędzy poszczególnymi segmentami trajektorii musimy przy przejściu z jednego segmentu do kolejnego przyspieszać lub opóźniać ruch tak, aby uzyskać odpowiednią zmianę prędkości. Pamiętajmy, że tak jak na rys. 49 typowa trajektoria zadana jest scharakteryzowana m.in. przez kilka punktów pośrednich, a w konsekwencji składa się z kilku segmentów.



Rys. 50 Trajektoria liniowo-paraboliczna w przestrzeni kartezjańskiej

Rozpatrzmy trajektorię ruchu z punktu  $A$  do  $C$  z punktem pośrednim  $B$ , określoną w przestrzeni kartezjańskiej dla wektora  $\mathbf{x}$ . Przedstawiono ją na rys. 50 dla współrzędnej  $x_i$  tego wektora. Jak widać, w chwili czasu  $t = 0$  trajektoria nie osiąga dokładnie punktu pośredniego  $B$ , ale przechodzi w jego pobliżu. W przedziale czasowym  $\langle -t_l, t_l \rangle$  trajektoria ma kształt paraboli, aby utrzymać stałe przyspieszenie lub opóźnienie. Innymi słowy, prędkość zaczyna się zmieniać liniowo o czas  $t_l$  przed osiągnięciem punktu  $B$  (tzn. dla  $t = -t_l$ ) i osiąga wartość stałą dla  $t = t_l$ . Na rysunku 50  $\Delta C_i$  oraz  $\Delta B_i$  oznaczają zmianę  $i$ -tej współrzędnej kartezjańskiej (tzn. odległości lub kąta) pomiędzy punktami  $B$  i  $C$  oraz  $B$  i  $A$ . Wielkości te stanowią współrzędne następujących wektorów:

$$\Delta \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{BA} \\ \phi_{BA} \\ x_{BA} \\ y_{BA} \\ z_{BA} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \Delta C_1 \\ \Delta C_2 \\ \Delta C_3 \\ \Delta C_4 \\ \Delta C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{BC} \\ \phi_{BC} \\ x_{BC} \\ y_{BC} \\ z_{BC} \end{bmatrix}.$$

Pamiętamy, że zmienna  $\psi$  nie występuje w zależnościach (274), ponieważ ma ona jedynie pomocniczy charakter i jest związana z definicją osi obrotu  $\mathbf{k}$ . Zatem zmiennymi w sensie współrzędnych uogólnionych są kąty  $\theta$  oraz  $\phi$ . Jak już wspomniano, ruch w przedziale czasowym  $\langle -t_l, t_l \rangle$  odbywa się ze stałym przyspieszeniem i aby je określić, zbadamy prędkość w chwilach  $-t_l$  oraz  $t_l$ . Na podstawie rys. 50 mamy:

$$\dot{\mathbf{x}}(-t_l) = \frac{\Delta \mathbf{B}}{t_l} \quad \text{oraz} \quad \dot{\mathbf{x}}(t_l) = \frac{\Delta \mathbf{C}}{t_c}, \quad (275)$$

gdzie  $t_c$  jest czasem trwania segmentu trajektorii pomiędzy punktami  $B$  oraz  $C$ . Powyższe zależności mają charakter wektorowy, gdyż są słuszne dla wszystkich współrzędnych wektora  $\dot{\mathbf{x}}$ .

Biorąc pod uwagę prędkości, zapiszemy wzór na przyspieszenie w rozważanym przedziale czasowym:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{2t_l} \left( \frac{\Delta \mathbf{C}}{t_c} - \frac{\Delta \mathbf{B}}{t_l} \right), \quad (276)$$

przy czym  $-t_l \leq t \leq t_l$ . Przyspieszenie jest stałe w tym przedziale. Po scałkowaniu

powyższego wzoru otrzymamy następującą zależność opisującą prędkość:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left( \frac{\Delta \mathbf{C}}{t_c} - \frac{\Delta \mathbf{B}}{t_l} \right) \lambda(t) + \frac{\Delta \mathbf{B}}{t_l}, \quad (277)$$

przy czym  $\lambda(t) = (t + t_l)/(2t_l)$ . Do całkowania równania (276) i określenia stałej całkowania wykorzystano pierwszy z warunków opisanych wzorami (275). Dla sprawdzenia można podstawić w ostatnim wzorze  $t = -t_l$  oraz  $t = t_l$ . W rezultacie otrzymuje się warunki początkowe określone za pomocą wzoru (275).

Całkowanie wzoru (277) prowadzi do następującej zależności na wektor współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{x}(t) = \left[ t_l \left( \frac{\Delta \mathbf{C}}{t_c} - \frac{\Delta \mathbf{B}}{t_l} \right) \lambda(t) + 2\Delta \mathbf{B} \right] \lambda(t) + \Delta \mathbf{B}, \quad (278)$$

przy czym stałą całkowania określono z warunku  $\mathbf{x}(-t_l) = \Delta \mathbf{B}$ .

Wzory (277) i (278) określają odpowiednio prędkość oraz zmiany współrzędnych uogólnionych związanych z ruchem wzdłuż linii parabolicznej w przestrzeni kartezjańskiej. Dzięki temu przy przejściu w pobliżu punktu pośredniego trajektorii nie ma skokowych zmian prędkości. Uzyskano to przez odpowiednie ukształtowanie sygnału przyspieszenia.

W przedziale czasu  $t_l \leq t \leq t_c$  równanie ruchu jest określone w następujący sposób:

$$\mathbf{x}(t) = \Delta \mathbf{C} \lambda(t), \quad (279)$$

przy czym teraz  $\lambda(t) = t/t_c$  i jest czasem znormalizowanym, tj.  $\lambda(t) \in \langle 0, 1 \rangle$ . Pragniemy w tym miejscu zwrócić uwagę, że współczynniki normalizujące są zazwyczaj różne przy przejściu pomiędzy kolejnymi segmentami trajektorii.

Na zakończenie podamy uwagę dotyczącą kształtowania kąta  $\psi$ . Otóż założymy, że zmiany kąta w przedziale czasu  $-t_l \leq t \leq t_l$  są określone za pomocą następującego wzoru:

$$\psi(t) = (\psi_{BC} - \psi_{AB}) \lambda(t) + \psi_{AB}, \quad (280)$$

przy czym  $\psi_{AB}$  oraz  $\psi_{BC}$  dotyczą przyrostu kąta odpowiednio w segmentach  $AB$  i  $BC$ . Zatem ostatecznie  $\psi$  zmienia się od wartości  $\psi_{AB}$  do  $\psi_{BC}$ .

Podsumowując możemy stwierdzić, że planowanie trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej nie jest prostym zadaniem, a nakłady obliczeniowe związane z kształtowaniem trajektorii są znaczne. Niemniej jednak użytkownik powinien umieć zaplanować trajektorię w przestrzeni kartezjańskiej, ponieważ jest to najbardziej naturalny sposób jej planowania.

## 7. Przykłady planowania trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej

Omówimy teraz pewne aspekty planowania trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej. Z koncepcyjnego punktu widzenia kontynuujemy rozważania prowadzone w poprzednim podrozdziale, ponieważ dotyczą planowania trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej. Na początku rozważymy przejście pomiędzy dwoma punktami pojedynczego segmentu



trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej. W dalszej części rozszerzymy te rozważania na dwa sąsiednie segmenty.

Oznaczmy przez  $P_0$  oraz  $P_1$  punkty początkowy i końcowy pojedynczego segmentu. Wektory położenia wyznaczające te punkty oznaczmy przez  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$ , a macierze rotacji związane z orientacją środka narzędzia w tych punktach odpowiednio przez  $\mathbf{R}_0$  oraz  $\mathbf{R}_1$ . Oczywiście macierze rotacji określają orientację narzędzia względem podstawowego układu współrzędnych.

Zadanie planowania trajektorii przedstawimy w nieco odmienny sposób niż w poprzednio. Założymy, że znormalizowany czas ruchu jest określony za pomocą następującego wzoru:

$$\lambda(t) = \frac{t_k - t}{t_k}, \quad (281)$$

gdzie jak poprzednio  $t_k$  jest całkowitym czasem przejścia z punktu  $P_0$  do  $P_1$ . Wzór ten określa, ile pozostało jeszcze znormalizowanego czasu, aby wykonać do końca trajektorię. Jest to wygodny sposób odmierzenia czasu, jeżeli założymy, że położenie i orientacja końcowa nie zmienia się. Tak jest w planowaniu trajektorii opisanym w poprzednim podrozdziale. W rozpatrywanym przypadku wzory na położenie i orientację pojedynczego segmentu przyjmą następującą postać:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 - \lambda(t) (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \quad (282)$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1 \mathbf{Rot}(\mathbf{k}, -\theta\lambda(t)), \quad (283)$$

przy czym  $\mathbf{Rot}(\mathbf{k}, \theta)$  jest macierzą rotacji wokół osi  $\mathbf{k}$  o kąt  $\theta$ , którą należy wykonać, aby układ współrzędnych opisany przez  $\mathbf{R}_0$  stał się zgodny z układem współrzędnych opisanym przez  $\mathbf{R}_1$ . Mamy zatem:

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{k}, \theta) = \mathbf{R}_0^{-1} \cdot \mathbf{R}_1. \quad (284)$$

Zwróćmy uwagę, że różnicę  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$  wyznaczamy tylko raz – przed rozpoczęciem właściwych obliczeń. Wzory (282) oraz (283) określają najprostszyp przypadk planowania trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej.

Przejdziemy teraz do opisu trajektorii jednego segmentu między punktami wyznaczonymi przez wektory  $\mathbf{p}_0$  i  $\mathbf{p}_1$  oraz macierze rotacji  $\mathbf{R}_0$  i  $\mathbf{R}_1$  dla jednego z algorytmów opisanych w poprzednim podrozdziale. Mianowicie, położenie będzie się zmieniać w sposób liniowy, a orientacja ma bardziej złożony charakter. Mamy wtedy:

$$\left. \begin{aligned} \eta(t) &= t/t_k, \\ \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}_0 + \eta(t)\Delta\mathbf{p}, \\ \mathbf{R}(t) &= (\mathbf{R}_0 \mathbf{Rot}(\mathbf{k}, \eta(t)\theta)) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \eta(t)\phi), \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

przy czym  $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ . Sekwencja rotacji składa się z liniowego przyrostu kąta  $\phi$  oraz obrotu wokół osi  $\mathbf{k}$  o kąt  $\theta$ . W prosty sposób można wyciągnąć wniosek, że nakłady obliczeniowe związane z wykonaniem sekwencji wzorów (285) są w przybliżeniu dwukrotnie wyższe niż związane ze wzorami (282) i (283).

Przejdziemy teraz do analizy sytuacji, kiedy następuje przejście pomiędzy dwoma segmentami, określonymi przez punkty  $P_0, P_1, P_2$ . Odpowiednie wektory położenia oznaczymy przez  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ , a orientację narzędzia w tych punktach za pomocą macierzy rotacji  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ . Rozpatrzmy przypadek gładkiej zmiany prędkości w otoczeniu punktu pośredniego  $P_1$ . Czas pokonywania segmentów oznaczymy odpowiednio przez  $t_{1k}$  oraz  $t_{2k}$ . Czas przyspieszania lub opóźniania w otoczeniu punktu  $P_1$  oznaczamy jako  $2t_l$ . Oznacza to, że przyspieszanie rozpoczyna się w czasie  $t_l$  przed osiągnięciem punktu  $P_1$ , a kończy w czasie  $t_l$  po minięciu tego punktu. Warunki graniczne dotyczące położenia w otoczeniu punktu  $P_1$  są następujące:

$$\mathbf{p}(t_{1k} - t_l) = \mathbf{p}_1 - \frac{t_l \Delta \mathbf{p}_1}{t_{1k}}, \quad (286)$$

$$\mathbf{p}(t_{1k} + t_l) = \mathbf{p}_0 + \frac{t_l \Delta \mathbf{p}_2}{t_{2k}}, \quad (287)$$

przy czym  $\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$  oraz  $\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ . Warunki graniczne dotyczące prędkości są następujące:

$$\left. \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right|_{t=t_{1k}-t_l} = \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{t_{1k}}, \quad (288)$$

$$\left. \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right|_{t=t_{1k}+t_l} = \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{t_{2k}}. \quad (289)$$

Podobnie jak w poprzednim podrozdziale założymy, że przyspieszenie (lub opóźnienie) jest stałe w przedziale czasowym  $t_{1k} - t_l \leq t \leq t_{1k} + t_l$  i wówczas

$$\frac{d^2 \mathbf{p}(t)}{dt^2} = \frac{1}{2t_l} \left( \left. \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right|_{t=t_{1k}+t_l} - \left. \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right|_{t=t_{1k}-t_l} \right) = \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{2t_l t_{2k}} - \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{2t_l t_{1k}}, \quad (290)$$

tzn. jest to przyspieszenie średnie wynikające z warunków granicznych prędkości (288) i (289) oraz czasu przyspieszania  $2t_l$  w otoczeniu punktu  $P_1$ . Całkowanie wzoru (290) z uwzględnieniem warunku początkowego (288) prowadzi do następującego wzoru określającego prędkość:

$$\frac{d\mathbf{p}(\tau)}{d\tau} = \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{2t_l t_{2k}} (\tau + t_l) - \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{2t_l t_{1k}} (\tau - t_l), \quad (291)$$

przy czym  $\tau = t - t_{1k}$ . Łatwo można sprawdzić, że w chwilach  $t = t_{1k} - t_l$  i  $t = t_{1k} + t_l$  słuszne są wzory (288) i (289). Z kolei całkowanie wzoru (291) prowadzi do zależności opisującej położenie z uwzględnieniem warunku (286):

$$\mathbf{p}(\tau) = \mathbf{p}_1 - \frac{\Delta \mathbf{p}_1}{4t_l t_{1k}} (\tau - t_l)^2 + \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{4t_l t_{2k}} (\tau + t_l)^2. \quad (292)$$

Łatwo również sprawdzić, że w chwilach  $\tau = -t_l$  oraz  $\tau = t_l$  są spełnione warunki graniczne (286) i (287).

W podobny sposób przedstawimy zależność opisującą orientację narzędzia:

$$\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{R}_1 \mathbf{Rot} \left( \mathbf{k}_1, -\frac{(\tau - t_l)^2}{4t_l t_{1k}} \theta_1 \right) \mathbf{Rot} \left( \mathbf{k}_2, \frac{(\tau + t_l)^2}{4t_l t_{2k}} \theta_2 \right), \quad (293)$$

przy czym podobnie jak dla jednego segmentu przyjmujemy, że:

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{k}_1, \theta_1) = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{R}_1 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{Rot}(\mathbf{k}_2, \theta_2) = \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2.$$

Zależność (293) opisuje gładką zmianę orientacji między dwoma segmentami trajektorii.

Zwróćmy uwagę, że przyspieszenie kątowe nie jest tutaj stałe, z wyjątkiem dwóch

przypadków: kiedy osie  $\mathbf{k}_1$  oraz  $\mathbf{k}_2$  są równoległe lub jedna z prędkości  $\phi_1 = \theta_1/t_{1k}$ ,

$\phi_2 = \theta_2/t_{2k}$  jest równa zero. Rozważanie powyższe można uogólnić na planowanie trajektorii

w przestrzeni złączy.