

3. Kinematyki różniczkowa i statyka

3.1. Jakobian geometryczny

Pozycja i orientacja x manipulatora o n stopniach swobody zależy od współrzędnych uogólnionych $q = [q_1 \dots q_n]^T$. Prędkość kątową i liniową manipulatora w zewnętrznej przestrzeni trójwymiarowej określa zależność:

$$\begin{aligned}\omega &= \mathbf{J}_O(q)\dot{q} \\ \dot{p} &= \mathbf{J}_P(q)\dot{q}\end{aligned}\quad (124)$$

Co można zapisać w zwartej postaci (równanie kinematyki różniczkowej manipulatora):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(q)\dot{q}\quad (125)$$

Gdzie macierz J o wymiarach $(6 \times n)$ jest tzw. jakobianem geometrycznym manipulatora:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_O \\ \mathbf{J}_P \end{bmatrix}\quad (126)$$

3.1.1. Pochodna macierzy rotacji

Macierz skośniesymetryczna

$$\mathbf{S}^T + \mathbf{S} = 0$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (127)$$

Właściwości

$$\mathbf{S}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{S}(\mathbf{a}) + \beta\mathbf{S}(\mathbf{b})$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{R}\mathbf{a} \times \mathbf{R}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathbf{a}) \quad (128)$$

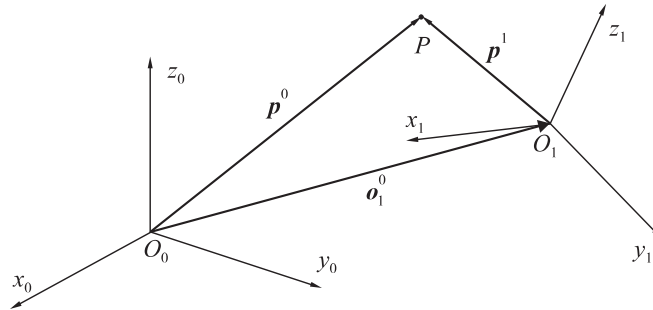
Pochodna macierzy rotacji R

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R} \quad (129)$$

$$\dot{\mathbf{R}}_i^0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i^0)\mathbf{R}_i^0$$

3.1.2. Prędkość ogniwa

Różniczkowanie wektora położenia



Rys. 36

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1 \quad (130)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v} + \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{p}}^1 \quad (131)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}^0 = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{p}}^1 + \mathbf{R}_1^0 \ddot{\mathbf{p}}^1 + \dot{\mathbf{v}} \quad (132)$$

Dodawanie prędkości kątowych

$$\dot{\mathbf{R}}_n^0 = \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \cdots \mathbf{R}_{n-1}^{n-2} \mathbf{R}_n^{n-1})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_n^0 = \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \cdots \mathbf{R}_{n-1}^{n-2} \mathbf{R}_n^{n-1} + \cdots + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \cdots \mathbf{R}_{n-1}^{n-2} \dot{\mathbf{R}}_n^{n-1}$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_n^0) \mathbf{R}_n^0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1^0) \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \cdots \mathbf{R}_n^{n-1} + \cdots + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \cdots \mathbf{R}_{n-1}^{n-2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^{n-1}) \mathbf{R}_n^{n-1}$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_n^0) \mathbf{R}_n^0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1^0) \mathbf{R}_n^0 + \cdots + \mathbf{R}_{n-1}^0 \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^{n-1}) (\mathbf{R}_{n-1}^0)^T \mathbf{R}_{n-1}^0 \mathbf{R}_n^{n-1}$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_n^0) \mathbf{R}_n^0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1^0) \mathbf{R}_n^0 + \cdots + \mathbf{S}(\mathbf{R}_{n-1}^0 \boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^{n-1}) \mathbf{R}_n^0$$

$$\dot{\mathbf{R}}_n^0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_n^0) \mathbf{R}_n^0 \text{ gdzie } \boldsymbol{\omega}_n^0 = \boldsymbol{\omega}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \boldsymbol{\omega}_{1,2}^1 + \cdots + \mathbf{R}_{n-1}^0 \boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^{n-1} \quad (133)$$

czyli

$$\boldsymbol{\omega}_n^0 = \boldsymbol{\omega}_1^0 + \boldsymbol{\omega}_{1,2}^1 + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{n-1,n}^{n-1}$$

Notacja DHPrędkość liniowa i -tego ogniwa

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}^0 \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} \\
\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}^0 \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \dot{\mathbf{R}}_{i-1}^0 \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} \\
\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}^0 \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \dot{\mathbf{R}}_{i-1}^0 \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} \\
\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}
\end{aligned} \tag{134}$$

Prędkość kątowna i -tego ogniwa

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_i &= \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1} \\
\dot{\mathbf{R}}_i &= \dot{\mathbf{R}}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \dot{\mathbf{R}}_i^{i-1} \\
\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{R}_i &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i^{i-1} \\
\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{R}_i &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \mathbf{R}_i + \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i \\
\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \\
\boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}
\end{aligned} \tag{135}$$

Złącze przesuwne P:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} &= 0 \quad \mathbf{v}_{i-1,i} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} \\
\boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} \\
\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}
\end{aligned} \tag{136}$$

Złącze obrotowe R:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} &= \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad \mathbf{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i} \\
\boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \\
\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i}
\end{aligned} \tag{137}$$

Notacja ZDHPrędkość liniowa i -tego ogniwa

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{i+1} &= \mathbf{p}_i + \mathbf{R}_i^0 \mathbf{r}_{i,i+1}^i \\ \dot{\mathbf{p}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}_{i,i+1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1} \end{aligned} \quad (138)$$

Prędkość kątowna i -tego ogniwa

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i+1} &= \mathbf{R}_i \mathbf{R}_{i+1}^i \\ \dot{\mathbf{R}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{R}}_i \mathbf{R}_{i+1}^i + \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{R}}_{i+1}^i \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i+1}) &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{R}_i \boldsymbol{\omega}_{i,i+1}^i) \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_{i,i+1} \end{aligned} \quad (139)$$

Złącze przesuwne P:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{i,i+1} &= \mathbf{0} \quad \mathbf{v}_{i,i+1} = \dot{d}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \boldsymbol{\omega}_i \\ \dot{\mathbf{p}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{p}}_i + \dot{d}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1} \end{aligned} \quad (140)$$

Złącze obrotowe R:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{i,i+1} &= \dot{\theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} \quad \mathbf{v}_{i,i+1} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{p}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{p}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,i+1} \end{aligned} \quad (141)$$

3.1.3. Przyspieszenie ogniwa

Notacja DH

Przyspieszenie liniowe i -tego ogniwa

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}^0 \mathbf{v}_{i-1,i}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1}^0 \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{v}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1}^0 \dot{\mathbf{v}}_{i-1,i}^{i-1} + \dot{\mathbf{R}}_{i-1}^0 \mathbf{v}_{i-1,i}^{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1}^0 \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} + \\ + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1}^0 \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \dot{\mathbf{R}}_{i-1}^0 \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{v}}_{i-1} + \dot{\mathbf{v}}_{i-1,i} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i}) + 2\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{v}_{i-1,i} \quad (142)$$

Przyspieszenie kątowe i -tego ogniwa

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1,i}^{i-1} + \dot{\mathbf{R}}_{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \quad (143)$$

W obu wyrażeniach należy uwzględnić prędkości względne:

Złącze przesuwne P:

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = 0 \quad \mathbf{v}_{i-1,i} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1}$$

Złącze obrotowe R:

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad \mathbf{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \mathbf{z}_{i-1}$$

Notacja ZDH

Zmieniając odpowiednie indeksy we wzorach (142,143) otrzymamy zależności na przyspieszenie i -tego ogniwa w tej notacji. Dodatkowo należy podstawić odpowiednie prędkości względne:

Złącze przesuwne P:

$$\omega_{i,i+1} = 0 \quad \mathbf{v}_{i,i+1} = \dot{d}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i$$

Złącze obrotowe R:

$$\omega_{i,i+1} = \dot{\theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1} \quad \mathbf{v}_{i,i+1} = \mathbf{0}$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}$$

Propagacja prędkości i przyspieszeń w łańcuchu kinematycznym

Notacja ZDH

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1}^{i+1} = \mathbf{R}_i^{i+1} \boldsymbol{\omega}_i^i + \dot{\Theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \text{ obrotowe} \quad (144)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1}^{i+1} = \mathbf{R}_i^{i+1} \boldsymbol{\omega}_i^i \text{ przesuwne} \quad (145)$$

$$\mathbf{v}_{i+1}^{i+1} = \mathbf{R}_i^{i+1} (\mathbf{v}_i^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{l}_{i,i+1}^i) \text{ obrotowe} \quad (146)$$

$$\mathbf{v}_{i+1}^{i+1} = \mathbf{R}_i^{i+1} (\mathbf{v}_i^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{l}_{i,i+1}^i) + \dot{d}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \text{ przesuwne} \quad (147)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1}^{i+1} = \mathbf{R}_i^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i + \mathbf{R}_i^{i+1} \boldsymbol{\omega}_i^i \times \dot{\Theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} + \ddot{\Theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \text{ obrotowe} \quad (148)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1}^{i+1} = \mathbf{R}_i^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \text{ przesuwne} \quad (149)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} = \mathbf{R}_i^{i+1} [\dot{\mathbf{v}}_i^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{l}_{i,i+1}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{l}_{i,i+1}^i)] \text{ obrotowe} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{i+1}^{i+1} = & \mathbf{R}_i^{i+1} [\dot{\mathbf{v}}_i^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{l}_{i,i+1}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{l}_{i,i+1}^i)] + \\ & + 2\boldsymbol{\omega}_{i+1}^{i+1} \times \dot{d}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} + \ddot{d}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \text{ przesuwne} \end{aligned} \quad (151)$$

3.1.4. Wyznaczanie jakobianu

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_O \\ \mathbf{J}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_{O1} & \dots & \dot{\mathbf{j}}_{Oi} & \dots & \dot{\mathbf{j}}_{On} \\ \dot{\mathbf{j}}_{P1} & \dots & \dot{\mathbf{j}}_{Pi} & \dots & \dot{\mathbf{j}}_{Pn} \end{bmatrix} \quad (152)$$

Analizując prędkości względne ogniw dla notacji DH można zapisać:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_{Oi} \\ \dot{\mathbf{j}}_{Pi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1}) \end{bmatrix} & \text{obrotowe} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{przesuwne} \end{cases} \quad (153)$$

Podobnie można to zrobić dla notcji ZDH pamiętając o odpowiednim zdefiniowaniu układu ($n + 1$).

Uwaga!

Wszystkie wektory muszą być wyrażone w układzie 0

3.2. Jakobian typowych manipulatorów - notacja DH

3.2.1. Planarny 3DOF

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2) + a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 \\ a_1 \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_O \\ \mathbf{J}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (154)$$

gdzie

$$J_{41} = -a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1 + q_2) - a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{42} = -a_2 \sin(q_1 + q_2) - a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{43} = -a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{51} = a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{52} = a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{53} = a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3).$$

3.2.2. Antropomorficzny

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2 + q_3)) \\ \sin q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2 + q_3)) \\ a_2 \sin q_2 + a_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \cos q_1 \cos q_2 \\ a_2 \sin q_1 \cos q_2 \\ a_2 \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \sin q_1 \\ -\cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_O \\ \mathbf{J}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin q_1 & \sin q_1 \\ 0 & -\cos q_1 & -\cos q_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} \\ 0 & J_{62} & J_{63} \end{bmatrix} \quad (155)$$

gdzie

$$J_{41} = -\sin q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2 + q_3)),$$

$$J_{42} = -\cos q_1 (a_2 \sin q_2 + a_3 \sin(q_2 + q_3)),$$

$$J_{43} = -a_3 \cos q_1 \sin(q_2 + q_3),$$

$$J_{51} = \cos q_1 (a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2 + q_3)),$$

$$J_{52} = -\sin q_1 (a_2 \sin q_2 + a_3 \sin(q_2 + q_3)),$$

$$J_{53} = -a_3 \sin q_1 \sin(q_2 + q_3),$$

$$J_{62} = a_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_2 + q_3),$$

$$J_{63} = a_3 \cos(q_2 + q_3)$$

3.2.3. Stanford

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_O \\ \mathbf{J}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & \mathbf{0} \\ z_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & z_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & z_2 \\ z_3 & z_4 & z_5 \\ z_3 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_3) & z_4 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_4) & z_5 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_5) \end{bmatrix} \quad (156)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 s_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 s_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_5 \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

3.3. Osobliwości kinematyczne

Są to położenia, w których jacobian manipulatora traci rząd.

Przykład: manipulator planarny 2R. Weźmy jacobian położenia dla współrzędnych w płaszczyźnie roboczej manipulatora:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (157)$$

Wyznacznik tego jacobianu:

$$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 s_2$$

Dla $a_1, a_2 \neq 0$ punkty osobliwe pojawiają się w konfiguracjach $\vartheta_2 = 0$ i $\vartheta_2 = \pi$

(158)

3.3.1. Dekompozycja osobliwości

W ogólności, dla złożonych struktur kinematycznych jest to bardzo trudne. Dla manipulatorów z nadgarstkiem sferycznym łatwo daje się rozdzielić obliczanie osobliwości na dwa etapy:

- obliczanie osobliwości ramienia (ruch trzech pierwszych stopni swobody),
- obliczanie osobliwości nadgarstka sferycznego.

Dokonajmy analizy jacobianu manipulatora z nadgarstkiem sferycznym:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (159)$$

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_4) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_5) \end{bmatrix}$$

czyli

$$\mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\det(\mathbf{J}) = -\det(\mathbf{J}_{21})\det(\mathbf{J}_{12}) \quad (160)$$

Osobliwości ramienia:

$$\det(\mathbf{J}_{21}) = 0 \quad (161)$$

Osobliwości nadgarstka:

$$\det(\mathbf{J}_{12}) = 0 \quad (162)$$

3.3.2. Osobliwości nadgarstka

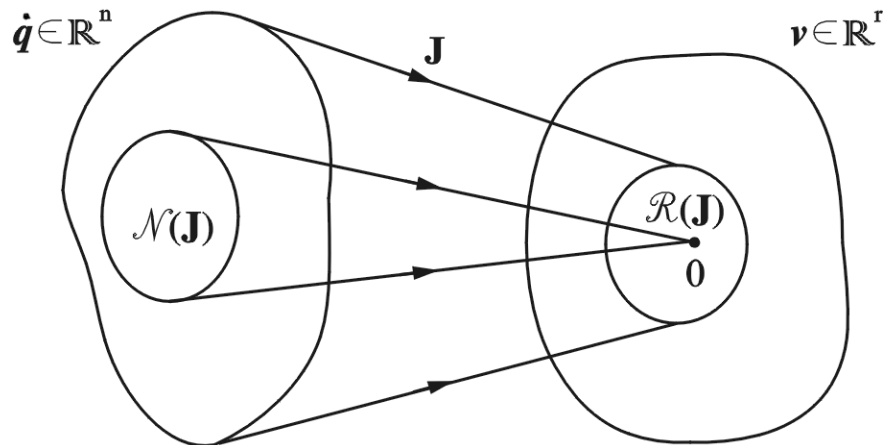
Występują gdy wektory jednostkowe z_3, z_4, z_5 są liniowo zależne np. w konfiguracji, gdy z_3, z_5 są równoległe tj. dla $\vartheta_5 = 0$ lub $\vartheta_5 = \pi$

3.3.3. Osobliwości ramienia

Rozpatrzmy je na przykładzie manipulatora antropomorficznego. Wyznacznik jacobianu położenie dla tej struktury wynosi $\det(\mathbf{J}_P) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23})$. Dla niezerowych długości ramion jest to spełnione, gdy $s_3 = 0$ (gdy $\vartheta_3 = 0$ lub $\vartheta_3 = \pi$) lub $(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0$ (konfiguracje, gdy rzut p_W na płaszczyznę xy jest zerowy).

3.4. Analiza redundancji

Jakobian manipulatora przedstawia odwzorowanie liniowe z przestrzeni prędkości uogólnionych złączy w przestrzeń prędkości końcówki manipulatora.



Rys. 37

Przestrzeń przeciwdziedziny oraz przestrzeń zerowa

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{J}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{J}) = n$$

Oznaczmy przez \tilde{q} rozwiązanie układu $v = J(q)\dot{q}$, a przez \mathbf{P} macierz o wymiarach $(n \times n)$ taką, że

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}) \equiv \mathcal{N}(\mathbf{J}).$$

Wtedy wektor określony równaniem:

$$\dot{q} = \tilde{q} + \mathbf{P}\dot{q}_a \quad (163)$$

dla dowolnego wektora \dot{q}_a jest też rozwiązaniem tego układu.

$$\mathbf{J}\dot{q} = \mathbf{J}\tilde{q} + \mathbf{J}\mathbf{P}\dot{q}_a = \mathbf{J}\tilde{q} = v,$$

ponieważ $\mathbf{J}\mathbf{P}\dot{q}_a = 0$ dla dowolnego wektora \dot{q}_a .

3.5. Odwrotne zadanie kinematyki różniczkowej

Gdy liczba stopni swobody jest równa wymiarowi przestrzeni zewnętrznej $n = r$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{v}. \quad (164)$$

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\xi) d\xi + \mathbf{q}(0).$$

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \dot{\mathbf{q}}(t_k)\Delta t, \quad (165)$$

3.5.1. Manipulatory redundantne

Gdy $n > r$

$$g(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}},$$

Posłużymy się metodą mnożników Lagrange'a:

$$g(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}),$$

Poszukiwane rozwiązanie powinno spełnić następujące warunki:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T = \mathbf{0} \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \mathbf{0}.$$

Na podstawie pierwszego z nich: $\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, skąd wynika, że

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (166)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}.$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v},$$

Daje ostatecznie rozwiązanie:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v}. \quad (167)$$

Pomnóżmy lewostronnie przez \mathbf{J} i gdy $\mathbf{C} = \mathbf{U}$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}, \quad (168)$$

gdzie $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ i jest macierzą pseudoinwersji prawostronnej.

Wróćmy do równania (163):

$$g(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_a)^T(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_a)$$

będziemy minimalizować normę wektora $\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_a$.

$$g(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_a)^T(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_a) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}),$$

której minimalizacja prowadzi do rozwiązania:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v} + (\mathbf{U} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})\dot{\mathbf{q}}_a, \quad (169)$$

Sposób wyboru wektora $\dot{\mathbf{q}}_a$ dla wykorzystania redundantnych stopni swobody manipulatora:

$$\dot{\mathbf{q}}_a = k_a \left(\frac{\partial w(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \quad (170)$$

gdzie $k_a > 0$, $w(\mathbf{q})$ jest dodatkową funkcją celu współrzędnych uogólnionych (np. manipulatywność).

3.5.2. Osobliwości kinematyczne

Zwróćmy uwagę, że rozwiązania (164) i (168) wymagają pełnego rzędu jacobianu. Gdy jacobian traci rząd:

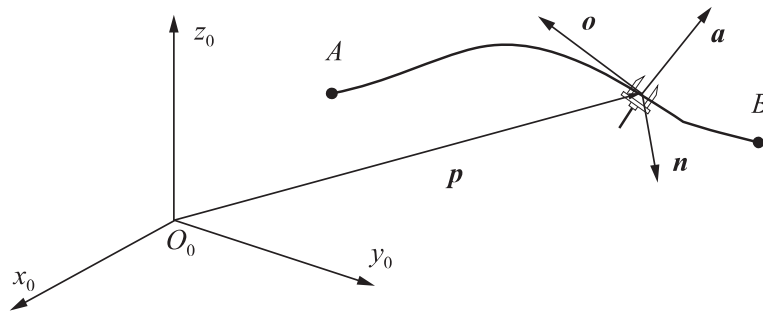
1. zastosować technikę SVD (rozkładu według wartości szczególnych macierzy \mathbf{J})
2. odwrotność jacobianu przy tłumionych najmniejszych kwadratach DLS (ang. *damped least-squares inverse*) w postaci:

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T + k^2\mathbf{U})^{-1}, \quad (171)$$

gdzie k jest współczynnikiem tłumienia, który warunkuje lepsze rozwiązanie problemu (minimalizacja funkcji kosztów)

$$g(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}})^T(\mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2}k^2\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}}. \quad (172)$$

3.6. Jakobian analityczny



Rys. 38

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Omega \\ \mathbf{p} \end{bmatrix},$$

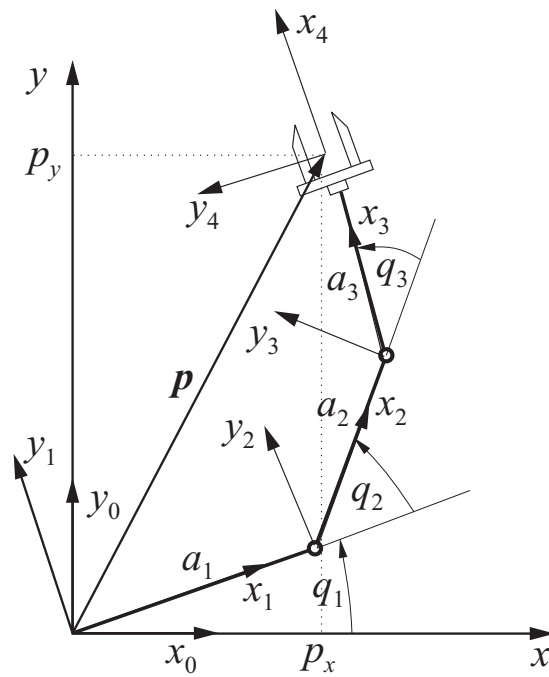
$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q}), \quad (173)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_p(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_o(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (174)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_o(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_p(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (175)$$

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (176)$$



Rys. 39

$$\mathbf{R}_4^0 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2 + q_3) & -\sin(q_1 + q_2 + q_3) & 0 \\ \sin(q_1 + q_2 + q_3) & \cos(q_1 + q_2 + q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2) + a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Omega \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 + q_2 + q_3 \\ a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2) + a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \end{bmatrix}.$$

Jakobian geometryczny

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$J_{41} = -a_1 \sin q_1 - a_2 \sin(q_1 + q_2) - a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{42} = -a_2 \sin(q_1 + q_2) - a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{43} = -a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{51} = a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

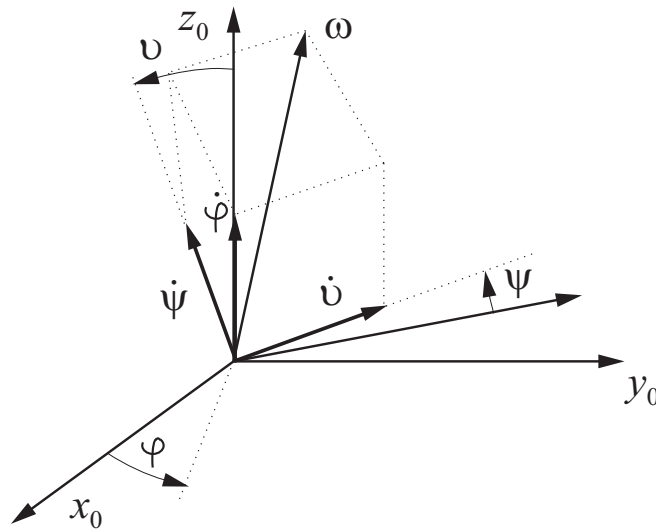
$$J_{52} = a_2 \cos(q_1 + q_2) + a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3),$$

$$J_{53} = a_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3).$$

Jakobian analityczny

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} \end{bmatrix},$$

Pochodne kątów Eulera



Rys. 40

$$\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\vartheta} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\psi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}^T.$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ 1 & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\Omega}) \dot{\boldsymbol{\Omega}}.$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\boldsymbol{\Omega}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\Omega}) \dot{\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{J}_A. \quad (177)$$

3.7. Algorytmy rozwiązujące zadanie odwrotne kinematyki

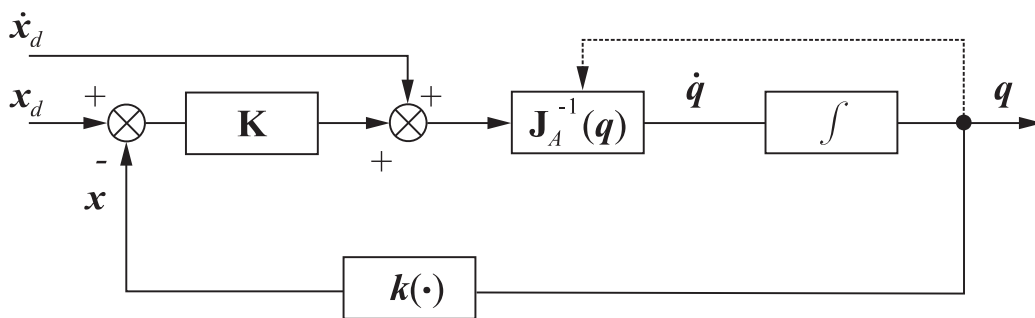
$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k))\mathbf{v}(t_k)\Delta t, \quad (178)$$

gdzie Δt jest odpowiednio dobranym przedziałem czasu.

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}. \quad (179)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}, \quad \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (180)$$

3.7.1. Odwrotność/pseudoinwersja jakobianu



Rys. 41

Współrzędne uogólnione \mathbf{q} , które mają odpowiadać zadanemu wektorowi \mathbf{x} , są przyjmowane za poprawne wtedy i tylko wtedy, gdy norma błędu $\mathbf{x}_d - \mathbf{k}(\mathbf{q})$ jest mniejsza od pewnej zadanej wartości - wielkość wejściowa algorytmu obliczeniowego. Gdy $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$ jest macierzą kwadratową i nieosobliwą.

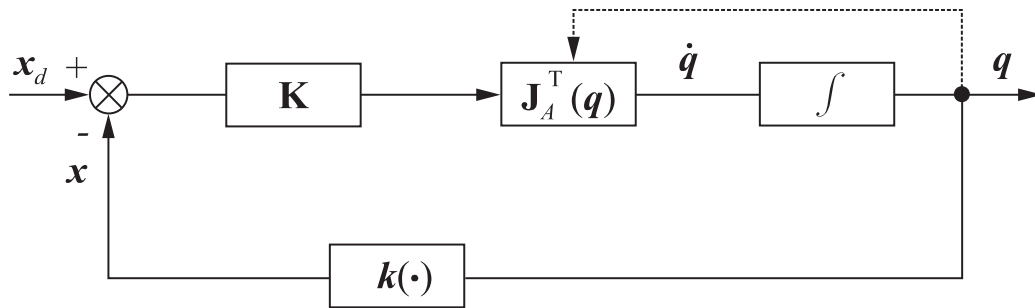
$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}\mathbf{e}), \quad (181)$$

$$\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}\mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (182)$$

Dla manipulatorów redundantnych równanie (181) przyjmuje postać (odpowiada równaniu (169)):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^\dagger(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}\mathbf{e}) + (\mathbf{U} - \mathbf{J}_A^\dagger\mathbf{J}_A)\dot{\mathbf{q}}_a, \quad (183)$$

3.7.2. Jakobian transponowany



Rys. 42

Alternatywne rozwiązanie polega na zdefiniowaniu funkcji Lapunowa:

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T \mathbf{K} e, \quad (184)$$

Funkcja ta spełnia następujące warunki definicyjne funkcji Lapunowa:

$$V(e) > 0 \quad \forall e \neq \mathbf{0} \quad \text{oraz} \quad V(\mathbf{0}) = 0.$$

Po zróżniczkowaniu $V(e)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T \mathbf{K} \dot{e} = e^T \mathbf{K} \dot{x}_d - e^T \mathbf{K} \dot{x}, \\ \dot{V}(e) &= e^T \mathbf{K} \dot{x}_d - e^T \mathbf{K} \mathbf{J}_A(q) \dot{q}. \end{aligned} \quad (185)$$

Dokonamy teraz wyboru prędkości uogólnionych w następujący sposób:

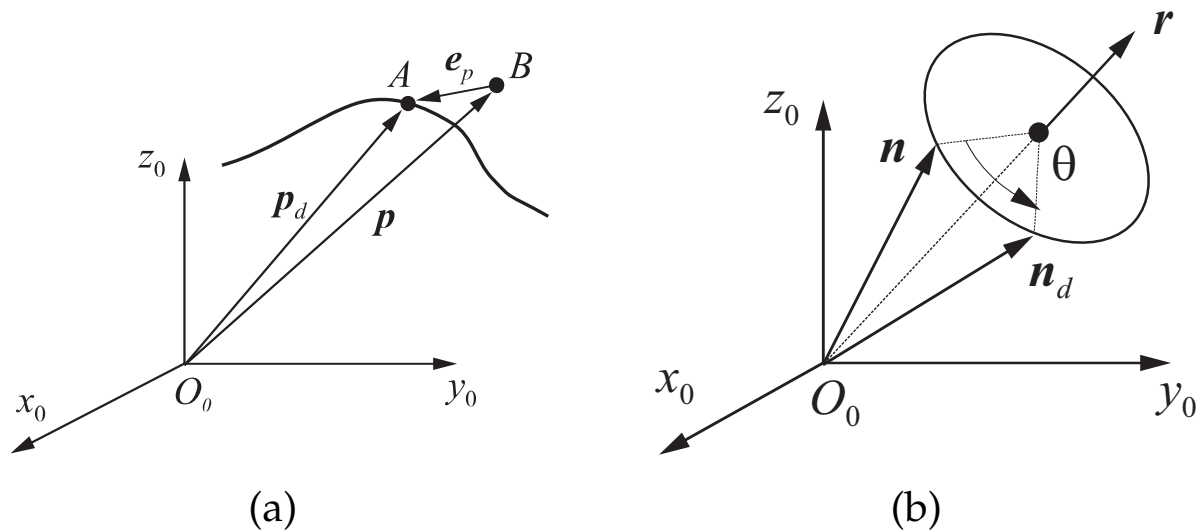
$$\dot{q} = \mathbf{J}_A^T(q) \mathbf{K} e, \quad (186)$$

co w konsekwencji prowadzi do równania:

$$\dot{V}(e) = e^T \mathbf{K} \dot{x}_d - e^T \mathbf{K} \mathbf{J}_A(q) \mathbf{J}_A^T(q) \mathbf{K} e. \quad (187)$$

3.7.3. Błąd orientacji

Obliczenie błędu (a) położenia i (b) orientacji



Rys. 43

$$\mathbf{e}_p = \mathbf{p}_d - \mathbf{p} \quad (188)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \dot{\mathbf{p}}_d - \dot{\mathbf{p}} \quad (189)$$

Orientację zadaną oznaczymy przez $\mathbf{R}_d = [\mathbf{n}_d \ \mathbf{o}_d \ \mathbf{a}_d]$, a aktualną przez $\mathbf{R} = [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}]$. Błąd orientacji obliczamy na podstawie wzoru:

$$\mathbf{e}_o = \mathbf{r} \sin \theta. \quad (190)$$

$$\text{Rot}(\mathbf{r}, \theta) = \mathbf{R}_d \mathbf{R}^T. \quad (191)$$

Wzór powyższy opisuje, jakiego przekształcenia rotacji należy dokonać, aby uzyskać pokrywanie się układów \mathbf{R} i \mathbf{R}_d .

Obliczymy najpierw prawą stronę wzoru (191):

$$\mathbf{R}_d \mathbf{R}^T =$$

$$\begin{bmatrix} n_{dx}n_x + o_{dx}o_x + a_{dx}a_x & n_{dx}n_y + o_{dx}o_y + a_{dx}a_y & n_{dx}n_z + o_{dx}o_z + a_{dx}a_z \\ n_{dy}n_x + o_{dy}o_x + a_{dy}a_x & n_{dy}n_y + o_{dy}o_y + a_{dy}a_y & n_{dy}n_z + o_{dy}o_z + a_{dy}a_z \\ n_{dz}n_x + o_{dz}o_x + a_{dz}a_x & n_{dz}n_y + o_{dz}o_y + a_{dz}a_y & n_{dz}n_z + o_{dz}o_z + a_{dz}a_z \end{bmatrix} \quad (192)$$

Gdy odejmiemy element (1,2) od elementu (2,1) i przyrównamy tę różnicę do $2k_z \sin \theta$, to otrzymamy:

$$2r_z \sin \theta = (n_{dy}n_x - n_{dx}n_y) + (o_{dy}o_x - o_{dx}o_y) + (a_{dy}a_x - a_{dx}a_y)$$

$$r_z \sin \theta = \frac{1}{2}[(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_d)_z + (\mathbf{o} \times \mathbf{o}_d)_z + (\mathbf{a} \times \mathbf{a}_d)_z]$$

indeks z określa odpowiednią składową iloczynów

wektorowych zdefiniowanych wyżej. Odejmiemy element (3,1) od elementu (1,3) i przyrównamy różnicę do $2k_y \sin \theta$:

$$r_y \sin \theta = \frac{1}{2}[(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_d)_y + (\mathbf{o} \times \mathbf{o}_d)_y + (\mathbf{a} \times \mathbf{a}_d)_y]$$

Postępując analogicznie, odejmiemy od elementu (2,3) element (3,2) i przyrównamy do $2k_x \sin \theta$, co daje

$$r_x \sin \theta = \frac{1}{2}[(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_d)_x + (\mathbf{o} \times \mathbf{o}_d)_x + (\mathbf{a} \times \mathbf{a}_d)_x]$$

Na podstawie powyższych wzorów możemy natychmiast napisać, że

$$\mathbf{e}_o = \mathbf{r} \sin \theta = \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_d + \mathbf{o} \times \mathbf{o}_d + \mathbf{a} \times \mathbf{a}_d) \quad (193)$$

Z uwagi na funkcję \sin kąt θ (reprezentujący błąd orientacji) powinien się zawierać w przedziale $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Obliczenie pierwszej i drugiej pochodnej błędu orientacji

Na początku wyznaczmy pochodną pierwszego składnika wzoru (193):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_d) = \dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n}_d + \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}_d = -\mathbf{S}(\mathbf{n}_d)\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{S}(\mathbf{n})\dot{\mathbf{n}}_d. \quad (194)$$

Pochodne wektorów jednostkowych obliczymy według następujących wzorów:

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = -\mathbf{S}(\mathbf{n})\boldsymbol{\omega} \quad \text{oraz} \quad \dot{\mathbf{n}}_d = \boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{n}_d = -\mathbf{S}(\mathbf{n}_d)\boldsymbol{\omega}_d,$$

przy czym $\boldsymbol{\omega}$ oraz $\boldsymbol{\omega}_d$ są prędkościami kątowymi układów $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ oraz $\mathbf{n}_d, \mathbf{o}_d, \mathbf{a}_d$ względem układu podstawowego. Podstawiając powyższe zależności do wzoru (194), otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_d) = \mathbf{S}(\mathbf{n}_d)\mathbf{S}(\mathbf{n})\boldsymbol{\omega} - \mathbf{S}(\mathbf{n})\mathbf{S}(\mathbf{n}_d)\boldsymbol{\omega}_d.$$

Przez analogię do tego wzoru zapiszemy pozostałe pochodne iloczynów wektorowych:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{o} \times \mathbf{o}_d) = \mathbf{S}(\mathbf{o}_d)\mathbf{S}(\mathbf{o})\boldsymbol{\omega} - \mathbf{S}(\mathbf{o})\mathbf{S}(\mathbf{o}_d)\boldsymbol{\omega}_d$$

oraz

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{a}_d) = \mathbf{S}(\mathbf{a}_d)\mathbf{S}(\mathbf{a})\boldsymbol{\omega} - \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{S}(\mathbf{a}_d)\boldsymbol{\omega}_d.$$

Na podstawie tych wzorów pochodną wzoru (193) względem czasu przekształcimy do postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_o = & -\frac{1}{2} (\mathbf{S}(\mathbf{n})\mathbf{S}(\mathbf{n}_d) + \mathbf{S}(\mathbf{o})\mathbf{S}(\mathbf{o}_d) + \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{S}(\mathbf{a}_d)) \boldsymbol{\omega}_d + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{S}(\mathbf{n}_d)\mathbf{S}(\mathbf{n}) + \mathbf{S}(\mathbf{o}_d)\mathbf{S}(\mathbf{o}) + \mathbf{S}(\mathbf{a}_d)\mathbf{S}(\mathbf{a})) \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Wprowadzimy następujące oznaczenie:

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{2} (\mathbf{S}(\mathbf{n}_d)\mathbf{S}(\mathbf{n}) + \mathbf{S}(\mathbf{o}_d)\mathbf{S}(\mathbf{o}) + \mathbf{S}(\mathbf{a}_d)\mathbf{S}(\mathbf{a})),$$

co w konsekwencji daje równanie:

$$\dot{e}_o = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{L}\boldsymbol{\omega}. \quad (195)$$

Biorąc teraz pod uwagę wzory (189) i (195), możemy napisać:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_o \\ \dot{e}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{L}\mathbf{J}_o(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{J}_p(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\omega}_d \\ \dot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}. \quad (196)$$

Przejdziemy teraz do obliczenia drugiej pochodnej błędu e .

Korzystając ze wzoru (196), możemy zapisać:

$$\ddot{e} = \begin{bmatrix} \ddot{e}_o \\ \ddot{e}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_d \\ \ddot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{L}}^T \boldsymbol{\omega}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{bmatrix} (\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}) - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{L}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (197)$$

gdzie

$$\dot{\mathbf{L}}^T = -\frac{1}{2} [\mathbf{S}(\mathbf{n})\mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{n}_d)\boldsymbol{\omega}_d) + \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{n})\boldsymbol{\omega})\mathbf{S}(\mathbf{n}_d) + \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{a}_d)\boldsymbol{\omega}_d) + \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{a})\boldsymbol{\omega})\mathbf{S}(\mathbf{a}_d) + \mathbf{S}(\mathbf{o})\mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{o}_d)\boldsymbol{\omega}_d) + \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{o})\boldsymbol{\omega})\mathbf{S}(\mathbf{o}_d)].$$

Wzór (197) możemy przedstawić również w alternatywnej postaci:

$$\ddot{e} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{L}}^T \boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \dot{\mathbf{L}}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{L}\dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \ddot{\mathbf{p}}_d - \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}. \quad (198)$$

3.7.4. Porównanie algorytmów

3.8. Statyka

$$dW_\tau = \boldsymbol{\tau}^T d\mathbf{q}$$

$$dW_f = \mathbf{F}^T d\mathbf{p} + \mathbf{N}^T \boldsymbol{\omega} dt$$

$$dW_f = \mathbf{F}^T \mathbf{J}_p d\mathbf{q} + \mathbf{N}^T \mathbf{J}_O d\mathbf{q} = \mathbf{f}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}$$

$$\delta W_\tau = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q}$$

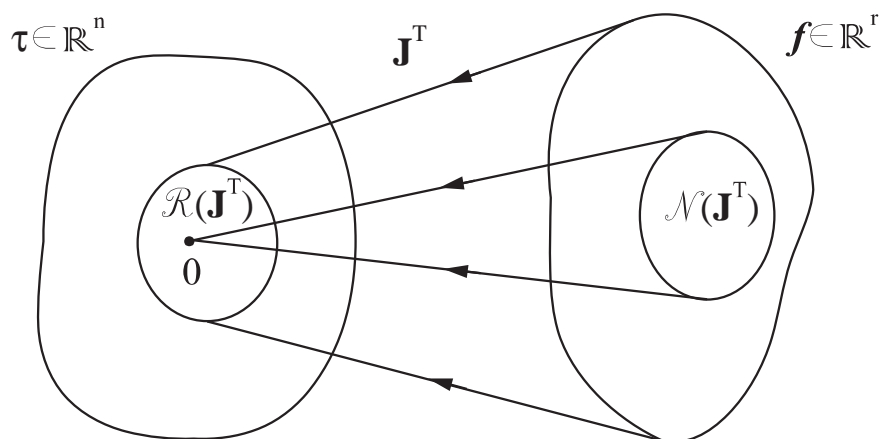
$$\delta W_f = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{q}$$

W stanie równowagi statycznej

$$\delta W_\tau - \delta W_f = 0$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{f} \quad (199)$$

3.8.1. Dualność kineto-statyczna



Rys. 44 Przeciwdziedzina oraz przestrzeń zerowa odwzorowania \mathbf{J}^T

Przeciwdziedziną odwzorowania \mathbf{J}^T jest podzbiór $\mathcal{R}(\mathbf{J}^T)$ przestrzeni \mathbb{R}^N tych sił uogólnionych działających w złączach, które równoważą siły działające w środku chwytaka w każdej konfiguracji manipulatora. Z kolei przestrzenią zerową odwzorowania \mathbf{J}^T nazywamy podprzestrzeń $\mathcal{N}(\mathbf{J}^T)$ przestrzeni \mathbb{R}^r sił działających na chwytak, które nie wymagają żadnych równoważących je sił uogólnionych w złączach w każdej konfiguracji manipulatora. Z tych definicji wynika, że każdą siłę $\mathbf{f} \in \mathcal{N}(\mathbf{J}^T)$ równoważą siły reakcji zadanej struktury mechanicznej. A więc gdy manipulator znajduje się w konfiguracji osobliwej, pozostaje on w równowadze niezależnie od sił zewnętrznych \mathbf{f} działających na chwytak. Zależność pomiędzy dwoma podprzestrzeniami wyraża się następująco:

$$\mathcal{N}(\mathbf{J}) \equiv \mathcal{R}^\perp(\mathbf{J}^T) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{R}(\mathbf{J}) \equiv \mathcal{N}^\perp(\mathbf{J}^T),$$

gdzie \perp oznacza uzupełnienie ortogonalne. Oznacza to, że jeżeli znany jest tylko jakobian manipulatora, to możemy zdefiniować przekształcenie kinematyczne prędkości oraz zależności statyczne przez określenie przeciwdziedziny oraz podprzestrzeni zerowej odpowiedniego jakobianu i jego transpozycji.

3.8.2. Transformacja prędkości i sił

Patrz punkt 4.1

3.9. Elipsoida manipulowalności

$$\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = 1$$
$$\mathbf{v}^T \mathbf{J}^\dagger{}^T \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v} = 1$$

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (200)$$

lub

$$w(\mathbf{q}) = |\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)|$$