2.12. Zadania odwrotne kinematyki

Określenie zadania odwrotnego kinematyki

$$\mathbf{T}_N^0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Warunek istnienia rozwiązań

Strategie rozwiązań:

(a) rozwiązania w postaci jawnej:
- metoda geometryczna,
- metody algebraiczne (przez podstawianie, przez redukcję do wielomianu),

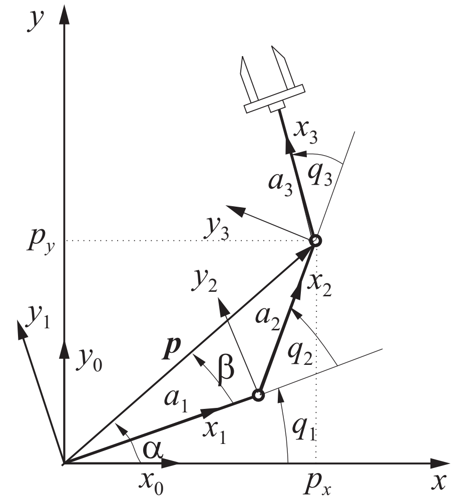
(b) rozwiązania numeryczne:
- z wykorzystaniem jakobianu,
- algorytmu iteracyjnego rozwiązywania z.o.k. :
  - metoda największego spadku,
  - metoda Newtona-Raphsona,
  - metoda wykorzystująca kwaterniony.

Odsprzężenie kinematyczne

2.12.1. Planarny 3DOF

Rozwiązanie geometryczne

Przykład: Robot planarny o 3 stopniach swobody



Rys. 32

$$\mathbf{T}_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_x^2 + p_y^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\pi - q_2)$$

$$\cos q_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

Musi być spełniony warunek: $\sqrt{p_x^2 + p_y^2} \leqslant a_1 + a_2$

$$\alpha = \mathrm{Atan2}(p_y, p_x)$$

$$\cos\beta\sqrt{p_x^2 + p_y^2} = a_1 + a_2\cos q_2$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) \text{ więc } q_1 = \alpha \pm \beta$$

przy czym $\beta \in (0, \pi)$ (istnienie odpowiednich trójkątów)

Rozwiązania algebraiczne

Przykład 1: Robot planarny o 3 stopniach swobody

$$\varphi = q_1 + q_2 + q_3 \tag{91}$$

$$\begin{aligned} p_x &= a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ p_y &= a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \tag{92}$$

$$p_x^2 + p_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos q_2 \tag{93}$$

$$\sin q_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_2} \tag{94}$$

$$q_2 = \text{Atan2}(\sin q_2, \cos q_2) \tag{95}$$

można odpowiednio pogrupować (92)

$$\begin{aligned} p_x &= k_1 \cos q_1 - k_2 \sin q_1 \\ p_y &= k_1 \sin q_1 + k_2 \cos q_1 \\ \text{gdzie: } k_1 &= a_1 + a_2 \cos q_2 \text{ , } k_2 = a_2 \sin q_2 \end{aligned} \tag{96}$$

po podstawieniu do (96) zależności

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ \gamma &= \text{Atan2}(k_2, k_1) \\ k_1 &= r \cos \gamma \text{ , } k_2 = r \sin \gamma \end{aligned} \tag{97}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tfrac{p_x}{r} &= \cos\gamma\cos q_1 - \sin\gamma\sin q_1 \\ \tfrac{p_y}{r} &= \cos\gamma\sin q_1 + \sin\gamma\cos q_1 \\ \text{czyli } \cos(\gamma+q_1) &= \tfrac{p_x}{r}\text{ , } \sin(\gamma+q_1) = \tfrac{p_y}{r} \\ \text{więc } q_1 &= \text{Atan2}(p_y, p_x) - \text{Atan2}(k_2, k_1) \end{aligned} \tag{98}$$

Inny sposób polega na podstawieniu rozwiązania na q_2 do układu równań (92) i rozwiązania układu równań. Wówczas otrzymujemy:

$$\cos q_1 = \frac{(a_1 + a_2\cos q_2)p_x + a_2 p_y \sin q_2}{p_x^2 + p_y^2}$$

$$\sin q_1 = \frac{(a_1 + a_2\cos q_2)p_y - a_2 p_x \sin q_2}{p_x^2 + p_y^2}$$

a następnie

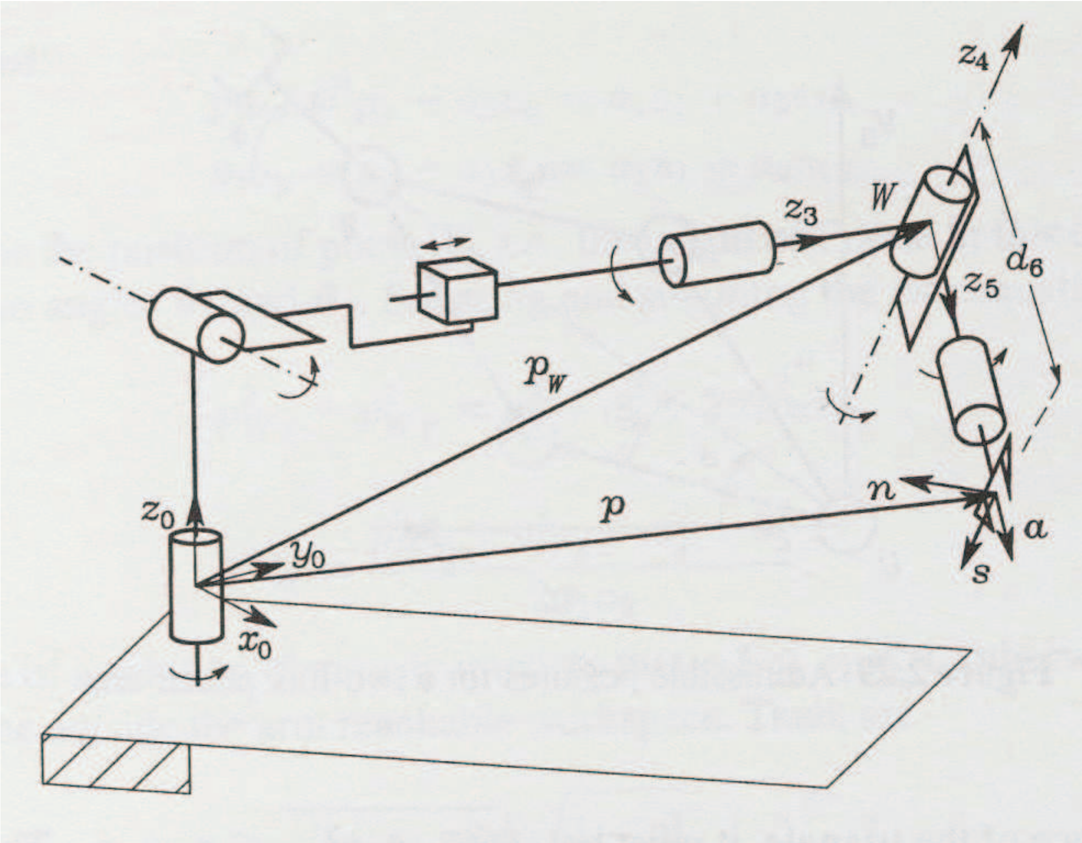
$$q_1 = \text{Atan2}(\sin q_1, \cos q_1) \tag{99}$$

Współrzędną uogólnioną q_3 wyznaczymy ostatecznie z równania (91):

$$q_3 = \varphi - q_1 - q_2 \tag{100}$$

2.12.2. Manipulator z nadgarstkiem sferycznym

Odsprzężenie kinematyczne



Rys. 33

Podział zadania na dwa prostsze:

- zadanie odwrotne kinematyki dla pozycji nadgarstka $\boldsymbol{p}_w$,
- zadanie odwrotne kinematyki dla orientacji.

Krok 1: Znajdujemy wektor $\boldsymbol{p}_w(q_1, q_2, q_3)$ łączący początek układu odniesienia z punktem centralnym nadgarstka

$$\boldsymbol{p}_w(q_1, q_2, q_3) = \boldsymbol{p} - d_6 \mathbf{R}_6^0 \boldsymbol{k} = \boldsymbol{p} - d_6 \boldsymbol{a} \tag{101}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} p_{w_x} \\ p_{w_y} \\ p_{w_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - d_6 r_{13} \\ p_y - d_6 r_{23} \\ p_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix} \tag{102}$$

Krok 2: Rozwiązać zadanie odwrotne kinematyki dla wektora $\boldsymbol{p}_w$ i znaleźć (q_1, q_2, q_3)

Krok 3: Znaleźć macierz $\mathbf{R}_3^0(q_1, q_2, q_3)$ (z zadania prostego kinematyki)

Krok 4: Znaleźć zestaw kątów Eulera odpowiadający macierzy $\mathbf{R}_6^3(q_4, q_5, q_6)$: wzór (23, 24) dla kątów odpowiednio $(\varphi, \vartheta, \psi)$ reprezentacji ZYZ

$$\begin{gathered} \mathbf{R}_6^0 = \mathbf{R}_3^0 \mathbf{R}_6^3 \\ \mathbf{R}_6^3 = (\mathbf{R}_3^0)^{-1} \mathbf{R}_6^0 = (\mathbf{R}_3^0)^T \mathbf{R}_6^0 \end{gathered} \tag{103}$$

2.12.3. Manipulator sferyczny

Redukcja do wielomianu

$$(\mathbf{T}_1^0)^{-1}\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{T}_2^1\mathbf{T}_3^2$$

$$\boldsymbol{p}_w^1 = \begin{bmatrix} p_{w_x}c_1 + p_{w_y}s_1 \\ -p_{w_z} \\ -p_{w_x}s_1 + p_{w_y}c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3s_2 \\ -d_3c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{104}$$

$$t = \tan\frac{\vartheta_1}{2} \quad c_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad s_1 = \frac{2t}{1+t^2}$$

czyli

$$(d_2 + p_{w_y})t^2 + 2p_{w_x}t + d_2 - p_{w_y} = 0$$

$$t = \frac{-p_{w_x} \pm \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 - d_2^2}}{d_2 + p_{w_y}}$$

$$\vartheta_1 = 2\text{Atan2}(p_{w_x} \pm \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 - d_2^2}, d_2 + p_{w_y}) \tag{105}$$

$$\frac{p_{w_x}c_1 + p_{w_y}s_1}{-p_{w_z}} = \frac{d_3s_2}{-d_3c_2}$$

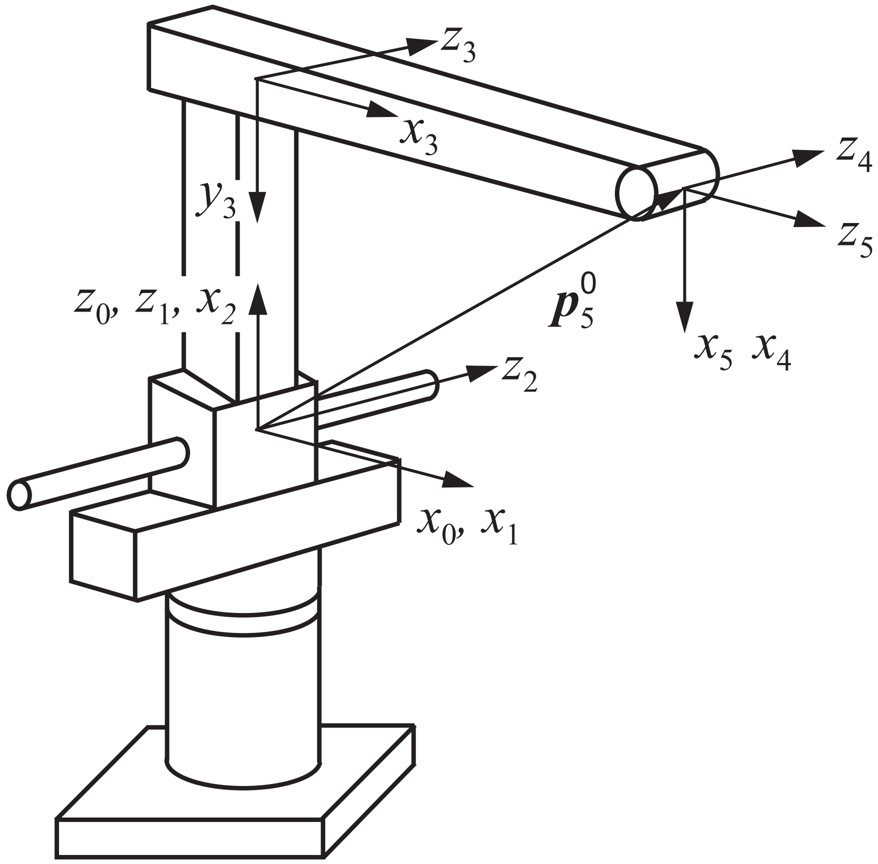
$$\vartheta_2 = \text{Atan2}(p_{w_x}c_1 + p_{w_y}s_1, p_{w_z}) \tag{106}$$

$$d_3 = \sqrt{(p_{w_x}c_1 + p_{w_y}s_1)^2 + p_{w_z}^2} \tag{107}$$

tylko dla $d_3 > 0$

2.12.4. Manipulator antropomorficzny

Przykład: Robot Yasukawa



Rys. 34

Tablica 1 Parametry ZDH dla robota Yasukawa L-3

Nr ogniwa	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	$\theta_i = q_i$	σ_i	$\bar{\sigma}_i$
1	0	0	0	q_1	0	1
2	$-\pi/2$	0	0	q_2	0	1
3	0	a_2	0	q_3	0	1
4	0	a_3	0	q_4	0	1
5	$\pi/2$	0	0	q_5	0	1

$$\mathbf{T}_5^0 = \mathbf{T}_1^0\mathbf{T}_2^1\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_4^3\mathbf{T}_5^4 \tag{108}$$

Pomnóżmy obustronnie to równanie przez $(\mathbf{T}_1^0)^{-1}$:

$$(\mathbf{T}_1^0)^{-1}\mathbf{T}_5^0 = \mathbf{T}_2^1\mathbf{T}_3^2\mathbf{T}_4^3\mathbf{T}_5^4 \tag{109}$$

Lewa strona tego równania ma postać:

$$\begin{bmatrix} r_{11}\cos q_1 + r_{21}\sin q_1 & r_{12}\cos q_1 + r_{22}\sin q_1 & r_{13}\cos q_1 + r_{23}\sin q_1 & p_x\cos q_1 + p_y\sin q_1 \\ -r_{11}\sin q_1 + r_{21}\cos q_1 & -r_{12}\sin q_1 + r_{22}\cos q_1 & -r_{13}\sin q_1 + r_{23}\cos q_1 & -p_x\sin q_1 + p_y\cos q_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{110}$$

Prawa strona wzoru (109) przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} - & - & \sin(q_2+q_3+q_4) & - \\ \sin q_5 & \cos q_5 & 0 & 0 \\ - & - & \cos(q_2+q_3+q_4) & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{111}$$

$$-p_x\sin q_1 + p_y\cos q_1 = 0 \tag{112}$$

co pozwoli wyznaczyć współrzędną uogólnioną q_1:

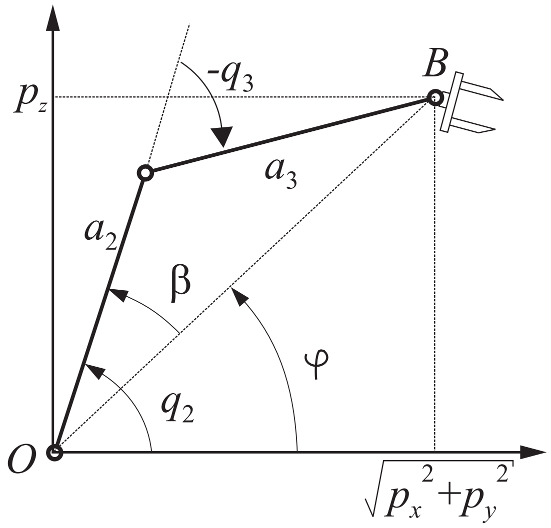
$$q_1 = \mathrm{Atan2}(p_y, p_x) \tag{113}$$

$$\begin{aligned} \sin q_5 &= -r_{11}\sin q_1 + r_{21}\cos q_1 \\ \cos q_5 &= -r_{12}\sin q_1 + r_{22}\cos q_1 \end{aligned} \tag{114}$$

$$q_5 = \text{Atan2}(-r_{11}\sin q_1 + r_{21}\cos q_1 - r_{12}\sin q_1 + r_{22}\cos q_1) \tag{115}$$

$$\begin{aligned} \cos(q_2 + q_3 + q_4) &= r_{33}, \\ \sin(q_2 + q_3 + q_4) &= r_{13}\cos q_1 + r_{23}\sin q_1 \end{aligned} \tag{116}$$

$$q_2 + q_3 + q_4 = \text{Atan2}(r_{13}\cos q_1 + r_{23}\sin q_1, r_{33}) \tag{117}$$



Rys. 35

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \tag{118}$$

$$q_3 = \text{Atan2}(\sqrt{1-\cos^2 q_3}, \cos q_3) \tag{119}$$

$$q_2 = \text{Atan2}(p_z, \sqrt{p_x^2 + p_y^2}) \pm \text{Atan2}(a_3\sin q_3, a_2 + a_3\cos q_3) \tag{120}$$

$$q_4 = \text{Atan2}(r_{13}\cos q_1 + r_{23}\cos q_1, r_{33}) - q_2 - q_3 \tag{121}$$

2.12.5. Nadgarstek sferyczny

$$\mathbf{R}_6^3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}^3 & \boldsymbol{s}^3 & \boldsymbol{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix}$$

Jeżeli założymy, że $\vartheta_5 \in (0, \pi)$, to otrzymujemy rozwiązanie:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_4 &= \text{Atan2}(a_y^3, a_x^3) \\ \vartheta_5 &= \text{Atan2}(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3) \\ \vartheta_6 &= \text{Atan2}(s_z^3, -n_z^3) \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Z kolei jeśli $\vartheta_5 \in (-\pi, 0)$, rozwiązanie przyjmuje postać:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(-a_y^3, -a_x^3) \\ \vartheta &= \text{Atan2}(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3) \\ \psi &= \text{Atan2}(-s_z^3, n_z^3) \end{aligned}\right\} \tag{123}$$