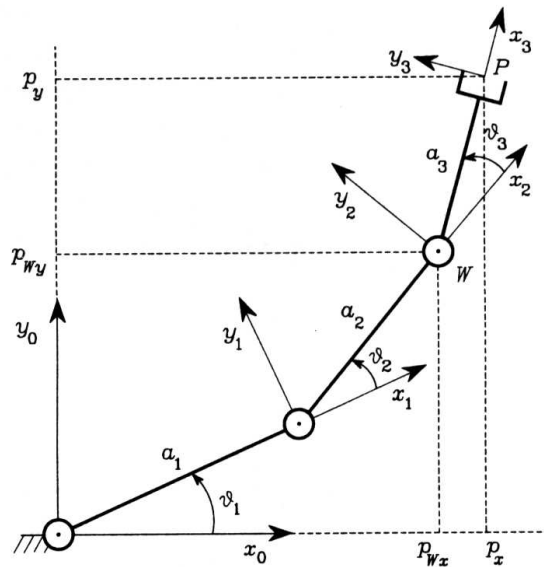


2.9. Kinematyka typowych struktur manipulatorów

2.9.1. Manipulator planarny 3DOF

Notacja DH



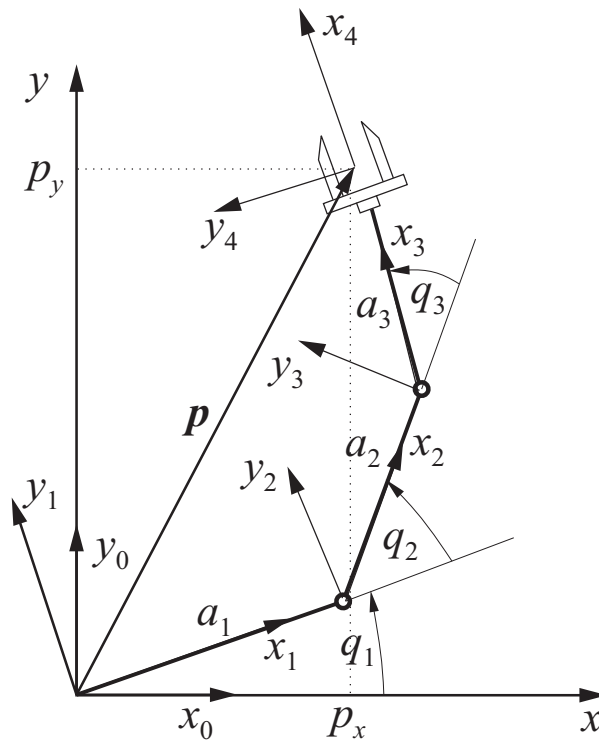
Rys. 28

Tablica 1 Parametry DH

Nr ogniwa	α_i	a_i	d_i	θ_i	σ_i	$\bar{\sigma}_i$
1	0	a_1	0	ϑ_1	0	1
2	0	a_2	0	ϑ_2	0	1
3	0	a_3	0	ϑ_3	0	1

$$\mathbf{T}_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{67}$$

Notacja ZDH



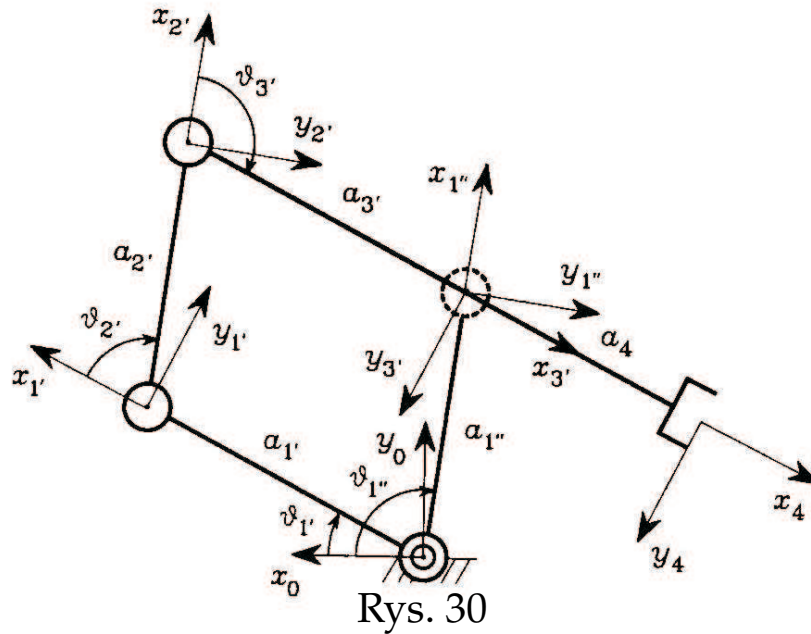
Rys. 29

Tablica 2 Parametry ZDH

Nr ogniwa	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	$\theta_i = q_i$	σ_i	$\bar{\sigma}_i$
1	0	0	0	q_1	0	1
2	0	a_1	0	q_2	0	1
3	0	a_2	0	q_3	0	1

$$\mathbf{T}_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{68}$$

2.9.2. Manipulator o strukturze równoległej



Tablica 3 Parametry DH

Nr ogniwa	α_i	a_i	d_i	θ_i	σ_i	$\bar{\sigma}_i$
1'	0	$a_{1'}$	0	$\vartheta_{1'}$	0	1
2'	0	$a_{2'}$	0	$\vartheta_{2'}$	0	1
3'	0	$a_{3'}$	0	$\vartheta_{3'}$	0	1
1''	0	$a_{1''}$	0	$\vartheta_{1''}$	0	1
4	0	a_4	0	0	0	1

$$\mathbf{T}_{3'}^0(\mathbf{q}') = \begin{bmatrix} c_{1'2'3'} & -s_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}c_{1'} + a_{2'}c_{1'2'} + a_{3'}c_{1'2'3'} \\ s_{1'2'3'} & c_{1'2'3'} & 0 & a_{1'}s_{1'} + a_{2'}s_{1'2'} + a_{3'}s_{1'2'3'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{1''}^0(q'') = \begin{bmatrix} c_{1''} & -s_{1''} & 0 & a_{1''}c_{1''} \\ s_{1''} & c_{1''} & 0 & a_{1''}s_{1''} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_4^{3'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_0^{3'}(\mathbf{o}_{3'}^0 - \mathbf{o}_{1''}^0) = \mathbf{0}$$

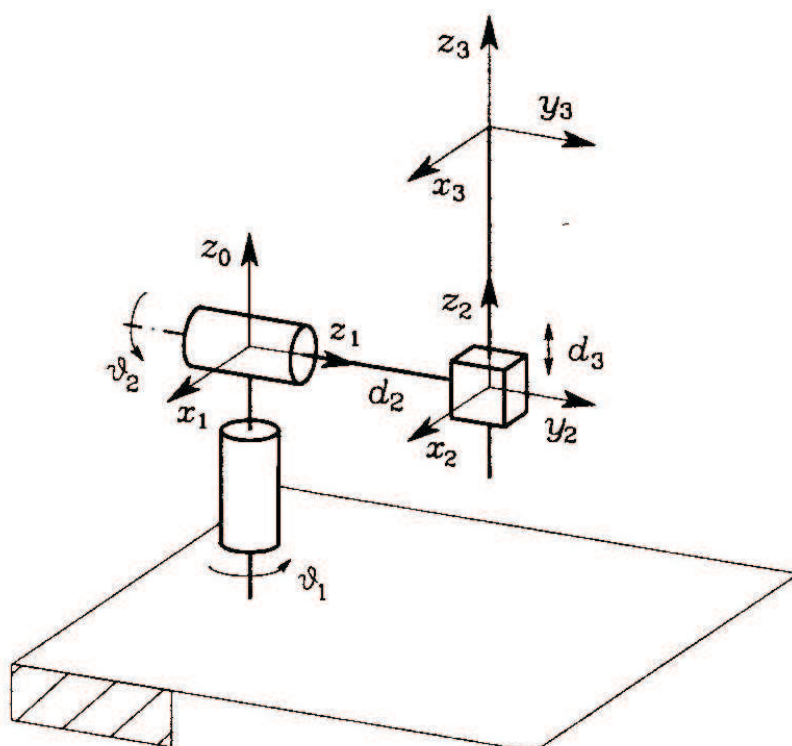
$$a_{1'}(c_{1'} + c_{1'2'3'}) + a_{1''}(c_{1'2'} - c_{1''}) = 0$$

$$a_{1'}(s_{1'} + s_{1'2'3'}) + a_{1''}(s_{1'2'} - s_{1''}) = 0$$

$$\vartheta_{2'} = \vartheta_{1''} - \vartheta_{1'} \quad \vartheta_{3'} = \pi - \vartheta_{2'} = \pi - \vartheta_{1''} + \vartheta_{1'}$$

$$\mathbf{T}_4^0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -c_{1'} & s_{1'} & 0 & a_{1''}c_{1''} - a_4c_{1'} \\ -s_{1'} & -c_{1'} & 0 & a_{1''}s_{1''} - a_4s_{1'} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

2.9.3. Manipulator sferyczny



Rys. 31

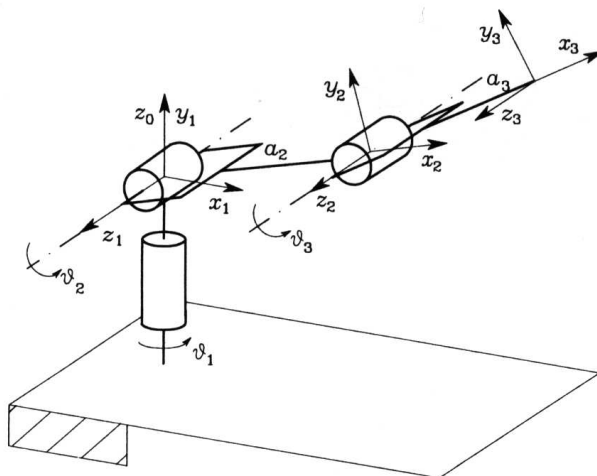
Tablica 4 Parametry DH

Nr ogniwa	α_i	a_i	d_i	θ_i	σ_i	$\bar{\sigma}_i$
1	$-\pi/2$	0	0	ϑ_1	0	1
2	$\pi/2$	0	d_2	ϑ_2	0	1
3	0	0	d_3	0	1	0

$$\mathbf{T}_1^0(\vartheta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2^1(\vartheta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{T}_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

2.9.4. Manipulator antropomorficzny 3R - notacja DH



Rys. 32

Tablica 5 Parametry DH

Nr ogniwa	α_i	a_i	d_i	θ_i	σ_i	$\bar{\sigma}_i$
1	$\pi/2$	0	0	ϑ_1	0	1
2	0	a_2	0	ϑ_2	0	1
3	0	a_3	0	ϑ_3	0	1

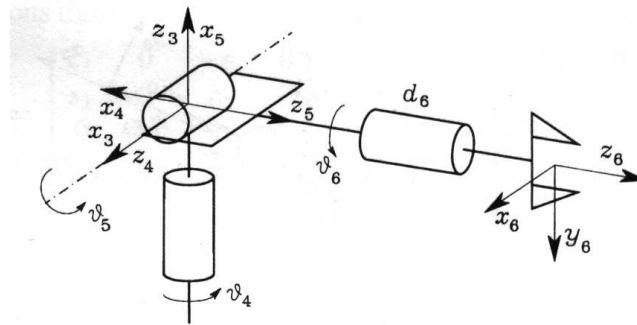
$$\mathbf{T}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (71)$$

dla $i = 2, 3$

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (73)$$

2.9.5. Nadgarstek sferyczny 3R - notacja DH



Rys. 33

Tablica 6 Parametry DH

Nr ogniwa	α_i	a_i	d_i	θ_i	σ_i	$\bar{\sigma}_i$
4	$-\pi/2$	0	0	ϑ_4	0	1
5	$\pi/2$	0	0	ϑ_5	0	1
6	0	0	d_6	ϑ_6	0	1

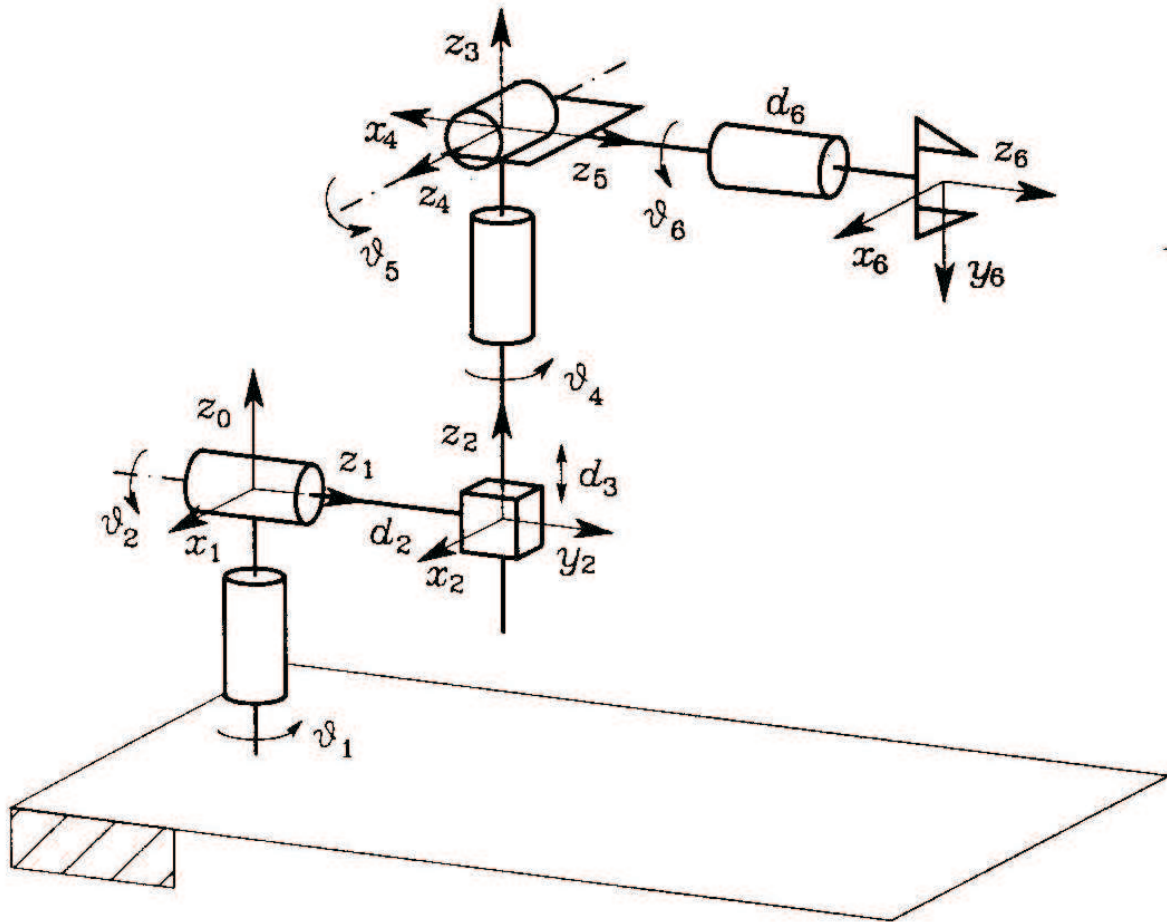
$$\mathbf{T}_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{74}$$

$$\mathbf{T}_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{75}$$

$$\mathbf{T}_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\mathbf{T}_6^3 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5c_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 - c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

2.9.6. Manipulator Stanford



Rys. 34

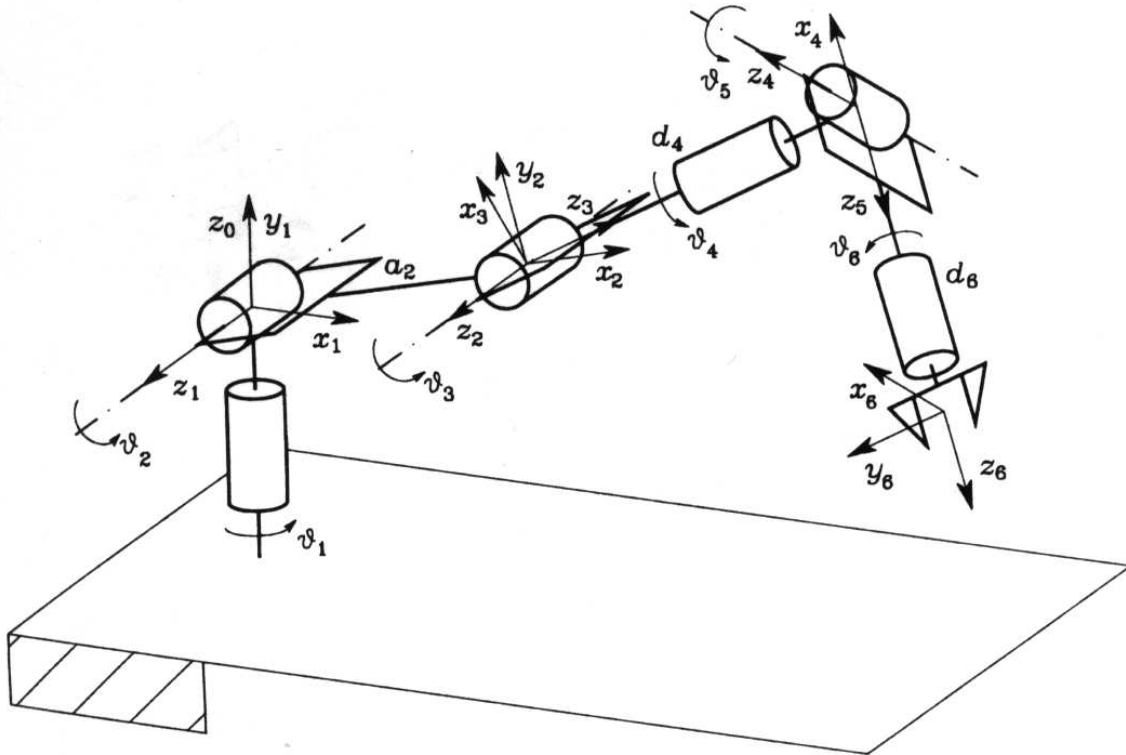
Tablica 7 Parametry DH

Nr ogniwa	α_i	a_i	d_i	θ_i	σ_i	$\bar{\sigma}_i$
1	$-\pi/2$	0	0	ϑ_1	0	1
2	$\pi/2$	0	d_2	ϑ_2	0	1
3	0	0	d_3	0	1	0
4	$-\pi/2$	0	0	ϑ_4	0	1
5	$\pi/2$	0	0	ϑ_5	0	1
6	0	0	d_6	ϑ_6	0	1

$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_6^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^0 & \mathbf{s}^0 & \mathbf{a}^0 & \mathbf{p}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= c_1(c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6) - s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6), \\ r_{21} &= s_1(c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6) + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6), \\ r_{31} &= -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6, \\ r_{12} &= c_1(-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6) - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6), \\ r_{22} &= s_1(-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6) + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6), \\ r_{32} &= s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6, \\ r_{13} &= c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5, \\ r_{23} &= s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5, \\ r_{33} &= -s_2c_4s_5 + c_2c_5, \\ p_x &= c_1s_2d_3 + s_1d_2 + (c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5)d_6, \\ p_y &= s_1s_2d_3 + c_1d_2 + (s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5)d_6, \\ p_z &= c_2d_3 + (-s_2c_4s_5 + c_2c_5)d_6, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

2.9.7. Manipulator antropomorficzny z nadgarstkiem sferycznym 6R



Rys. 35

Tablica 8 Parametry DH

Nr ogniwa	α_i	a_i	d_i	θ_i	σ_i	$\bar{\sigma}_i$
1	$\pi/2$	0	0	ϑ_1	0	1
2	0	a_2	0	ϑ_2	0	1
3	$\pi/2$	0	0	ϑ_3	0	1
4	$-\pi/2$	0	d_4	ϑ_4	0	1
5	$\pi/2$	0	0	ϑ_5	0	1
6	0	0	d_6	ϑ_6	0	1

$$\mathbf{T}_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$\mathbf{T}_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{T}_6^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

$$\begin{aligned}
r_{11} &= c_1(c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6) + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6), \\
r_{21} &= s_1(c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6) - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6), \\
r_{31} &= s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_{23}s_5c_6, \\
r_{12} &= c_1(-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6) + s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6), \\
r_{22} &= s_1(-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6) - c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6), \\
r_{32} &= -s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - c_{23}s_5s_6, \\
r_{13} &= c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + s_1s_4s_5, \\
r_{23} &= s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - c_1s_4s_5, \\
r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5, \\
p_x &= a_2c_1c_2 + d_4c_1s_{23} + d_6(c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + s_1s_4s_5), \\
p_y &= a_2s_1c_2 + d_4s_1s_{23} + d_6(s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - c_1s_4s_5), \\
p_z &= a_2s_2 - d_4c_{23} + d_6(s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5),
\end{aligned}$$

(83)

2.10. Przestrzeń konfiguracyjna a przestrzeń operacyjna (zadania)

Przestrzeń operacyjna to zbiór punktów określających położenie i orientację efektor manipulatora opisany m -elementowym wektorem x ($m \leq N$):

$$x = \begin{bmatrix} \Omega \\ p \end{bmatrix} \quad (84)$$

gdzie Ω jest minimalną reprezentacją kątową (orientacji), zaś p jest wektorem położenia (pozwalają opisywać zadanie wykonywane przez efektor robota).

Przestrzeń konfiguracyjna opisana jest N -elementowym wektorem współrzędnych uogólnionych

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_N \end{bmatrix} \quad (85)$$

Zatem k jest nieliniową funkcją wektorową zależną od q

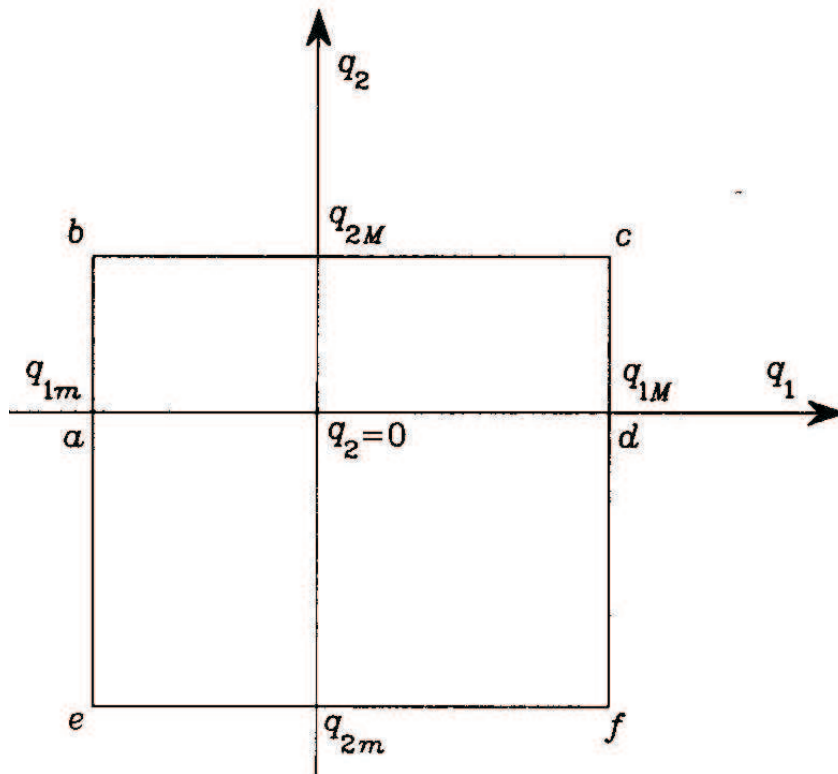
$$x = k(q) \quad (86)$$

2.10.1. Przetrzeń robocza

Przetrzeń robocza manipulatora jest całkowicie określona przez jego geometrię i zakres zmienności współrzędnych uogólnionych $q_{im} \leq q_i \leq q_{iM}$ dla $i = 1, 2, \dots, N$ spowodowany ograniczeniami mechanicznymi i określana jest wektorem $p = p(q)$.

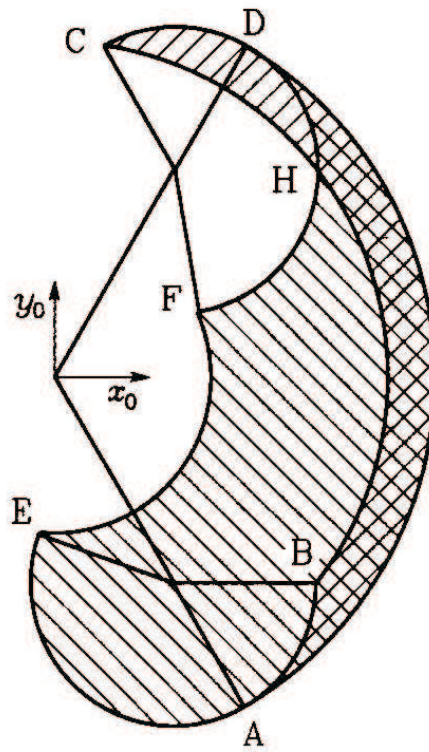
Pojęcia: przestrzeń robocza osiągalna, przestrzeń robocza manipulacyjna, dokładność, powtarzalność

Przykład: manipulator planarny 2R



Rys. 36

Przetrzeń robocza obliczana jest z zadania prostego kinematyki na podstawie określonych ograniczeń



Rys. 37

2.10.2. Redundancja kinematyczna

Manipulator nazywamy kinematycznie redundantnym, jeżeli liczba jego stopni swobody jest większa niż liczba zmiennych potrzebnych do opisu konkretnego zadania, czyli wymiar przestrzeni operacyjnej jest mniejszy niż wymiar przestrzeni złączy tj. $m < N$. (Redundancja jest zatem pojęciem względnym zależnym od zadania.)

2.11. Kalibracja kinematyki

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\vartheta}) \quad (87)$$

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{a}} \Delta \mathbf{a} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Delta \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{d}} \Delta \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \Delta \boldsymbol{\vartheta} \quad (88)$$

Niech

$$\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{d}^T \boldsymbol{\vartheta}^T]^T$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{a}} & \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} & \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_m - \boldsymbol{\gamma}_n$$

Zatem

$$\Delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\gamma}_n) \Delta \boldsymbol{\gamma}$$

Dla l położeń (pomiarów)

$$\Delta \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \mathbf{x}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{\Phi}_l \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\gamma} = \bar{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\gamma}) \Delta \boldsymbol{\gamma} \quad (89)$$

$$\Delta \boldsymbol{\gamma} = (\bar{\boldsymbol{\Phi}}^T \bar{\boldsymbol{\Phi}})^{-1} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^T \Delta \bar{\mathbf{x}} \quad (90)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_n + \Delta \boldsymbol{\gamma}$$