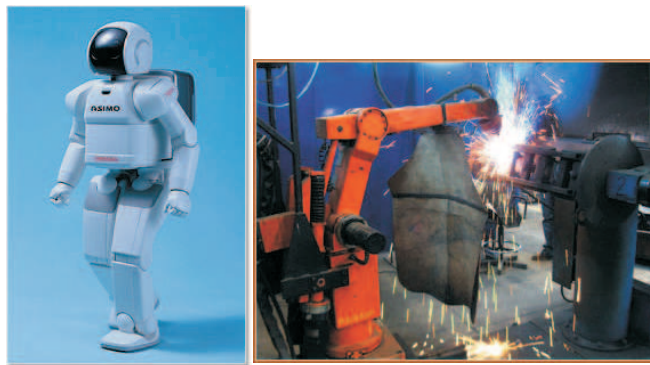


## 1. Wiadomości wstępne

### 1.1. Robotyka

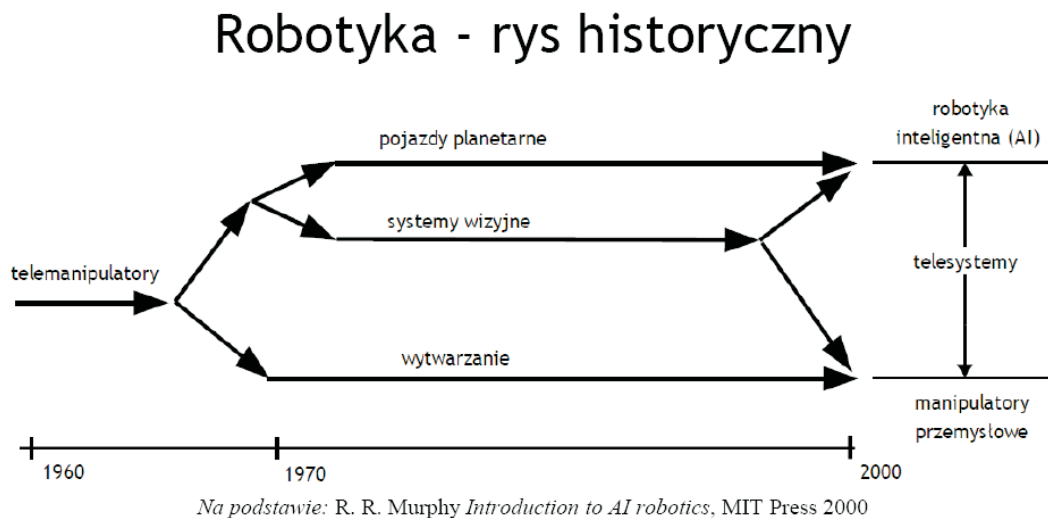
Po raz pierwszy terminu „robot” użył Karel Čapek w sztuce „Rossum’s Universal Robots” w 1921r. Od tego czasu uniwersalne urządzenia zastępujące lub wspomagające pracę człowieka są nazywane robotami (**robot** od słowa robotą czyli praca po czesku).



Rys. 1

Termin „robotyka” wprowadził rosyjski pisarz gatunku science fiction I. Asimov jako symbol nauki o robotach (w kontekście socjologicznej roli robota a dokładniej jego „sztucznego umysłu”). Asimov zaproponował trzy fundamentalne prawa dla robotów:

1. Robot nie może szkodzić człowiekowi jak również nie może poprzez zaniechanie działania narazić człowieka na szkodę.
2. Robot musi być posłuszny poleceniom wydawanym przez człowieka z wyjątkiem poleceń będących w konflikcie z pierwszym prawem.
3. Robot musi chronić swoją egzystencję do chwili, gdy nie stanie to w sprzeczności z pierwszym lub drugim prawem.



Rys. 2

Ważniejsze osiągnięcia mające wpływ na rozwój robotyki w porządku chronologicznym:

- 1947 - pierwszy teleoperator z napędem elektrycznym
- 1948 - teleoperator ze sprzężeniem od siły
- 1949 - rozpoczęcie prac nad obrabiarkami sterowanymi numerycznie CNC (Computer Numerical Control)
- 1954 - zaprojektowanie pierwszego robota przez G. Devola
- 1961 - zainstalowanie pierwszego robota w fabryce
- 1963 - pierwszy system wizyjny dla robota
- 1971 - robot Stanford Arm na Uniwersytecie Stanforda
- 1978 - wprowadzenie przez Unimation Inc. robota PUMA w fabryce General Motors
- 1979 - wprowadzenie robotów SCARA w Japonii
- 1981 - robot z napędem bezpośrednim DDA - Uniwersytet Carnegie-Mellon

Robotyka jest dziedziną nowoczesnej technologii łączącą różne gałęzie nauk technicznych:

- automatykę,
- elektrotechnikę,
- mechanikę,
- inżynierię przemysłową,
- informatykę,
- matematykę.

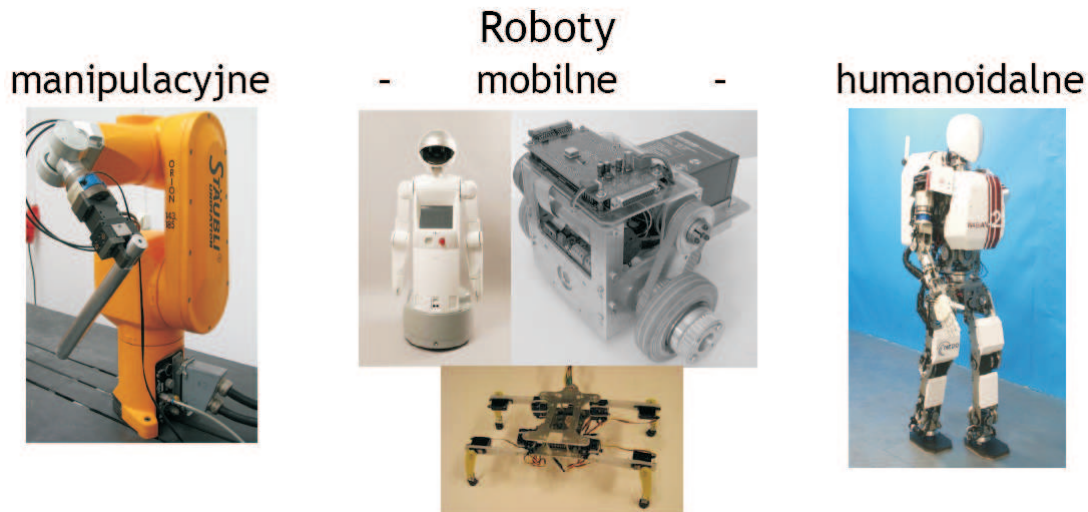
Robotyka może być zaklasyfikowana jako część szeroko pojętej *automatyki przemysłowej*.

**Robotyka** (łączy sztuczną percepcję z akcją) obejmuje następujące zagadnienia:

- kinematyka i dynamika robotów,
- sterowanie robotów,
- lokomocja,
- wizja maszynowa i sensoryka,
- sztuczna inteligencja,
- architektura komputerowych systemów sterowania,
- specjalizowane języki programowania.

## 1.2. Pojęcia podstawowe

**Robot** - urządzenie techniczne przeznaczone do realizacji funkcji manipulacyjnych i lokomocyjnych człowieka, mające określony zasób energii, informacji i charakteryzujące się całkowitą lub częściową autonomią w działaniu.



Rys. 3

**Robot przemysłowy** - (wg Robot Institute of America) wielofunkcyjny manipulator przeznaczony do przenoszenia materiałów, części lub wyspecjalizowanych urządzeń poprzez różne *programowane ruchy*, w celu realizacji różnorodnych zadań.

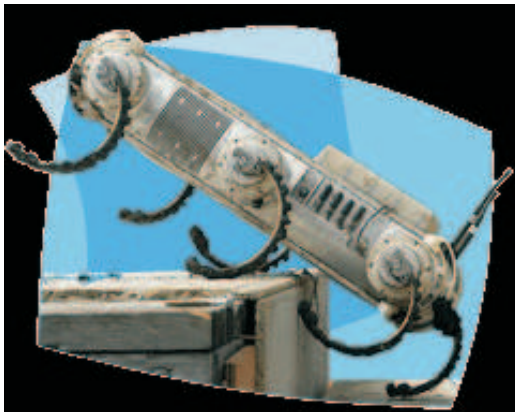
**Manipulator** - urządzenie techniczne przeznaczone do realizacji niektórych funkcji kończyny górnej człowieka. Rozróżnia się tutaj dwie funkcje: wsięgnikową i manipualcyjną (**manipulator = ramię + kiść**).

**Robot mobilny** - urządzenie techniczne przeznaczonym do realizacji funkcji lokomocyjnych. Najczęściej robot mobilny wyposażony jest w koła lub gąsienice. W klasie robotów

mobilych mieszczą się również roboty kroczące.

**Robotem kroczącym** nazywa się urządzenie techniczne przeznaczone do realizacji funkcji lokomocyjnych zwierząt i owadów mających kończyny lub odnóża. Lokomocja takiej maszyny ma charakter dyskretny i może być realizowana przy użyciu jednej, dwóch, trzech, czterech, sześciu, ośmiu lub więcej „nóg” jako chód, bieg lub skok po twardym podłożu.

**Pedipulatorem** nazywamy „nogę” robota krocącego. Pedipulator może być układem jedno-, dwu-, lub trójczłonowym.

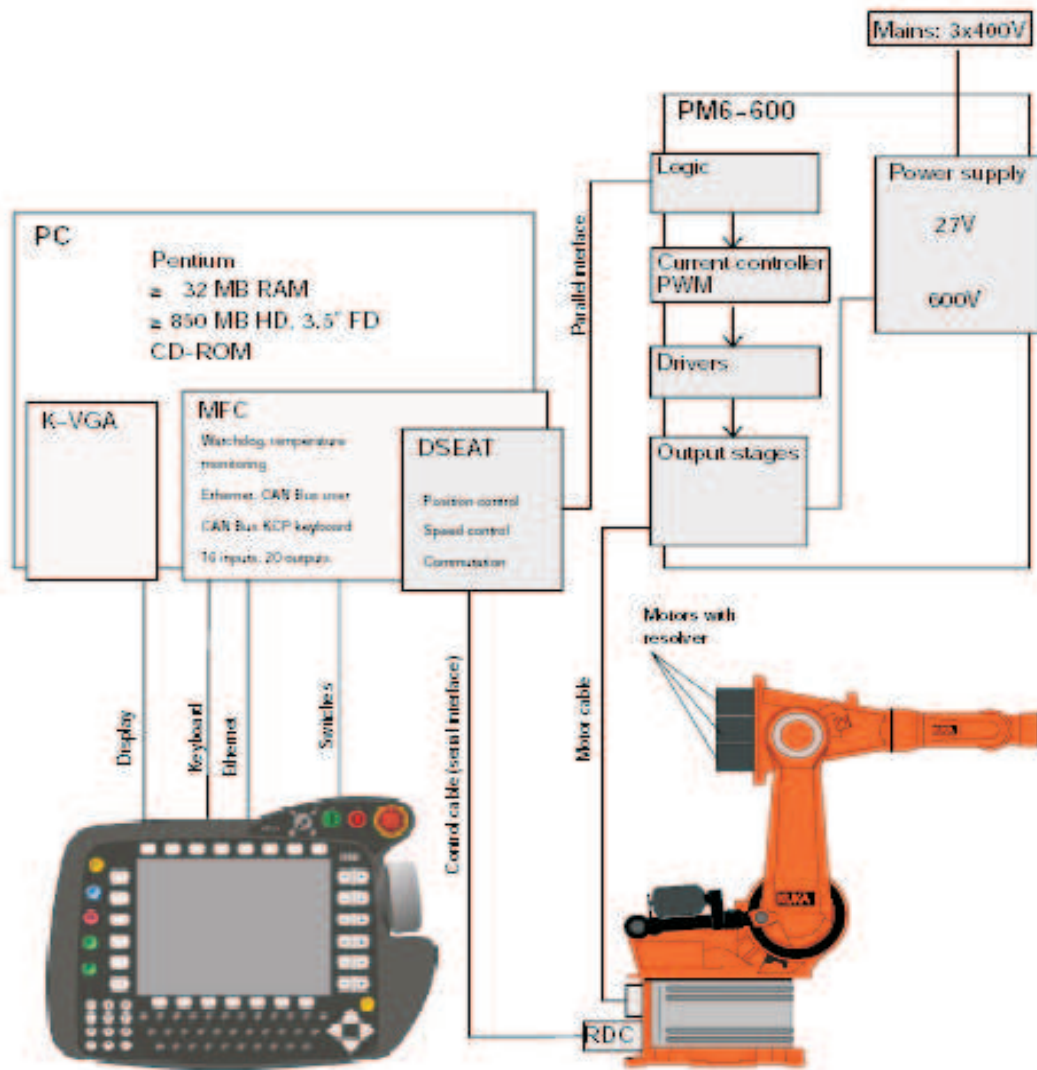


Rys. 4

Zgodnie z definicją robot oddziałuje na otoczenie w celu realizacji postawionego (przez człowieka) zadania, które zawsze rozumiane jest jako zmiana stanu otoczenia. Z tego powodu w schemacie działania robota zawsze wyróżnia się sześć elementów:

1. **Układ mechaniczny** złożony przede wszystkim z łańcucha(ów) kinematycznego służący do realizacji czynności manipulacyjnych i lokomocyjnych.
2. **Siłowniki** (elementy wykonawcze, napędy) przeznaczone do poruszania częścią mechaniczną robota.
3. **Układ sterowania** robota, którego zadaniem jest generowanie sygnałów sterownia.
4. **Układ sensoryczny** robota potrzebny do zamknięcia sprzężenia zwrotnego dla celów sterowania oraz do funkcji inspekcyjnych otoczenia.
5. **Otoczenie robota** tj. przestrzeń, w której znajduje się robot.
6. **Zadanie** rozumiane jako różnica dwóch stanów otoczenia - początkowego i końcowego (pożądanego). Zadanie opisane jest w odpowiednim języku (najchętniej naturalnym) i realizowane jest przez komputer.

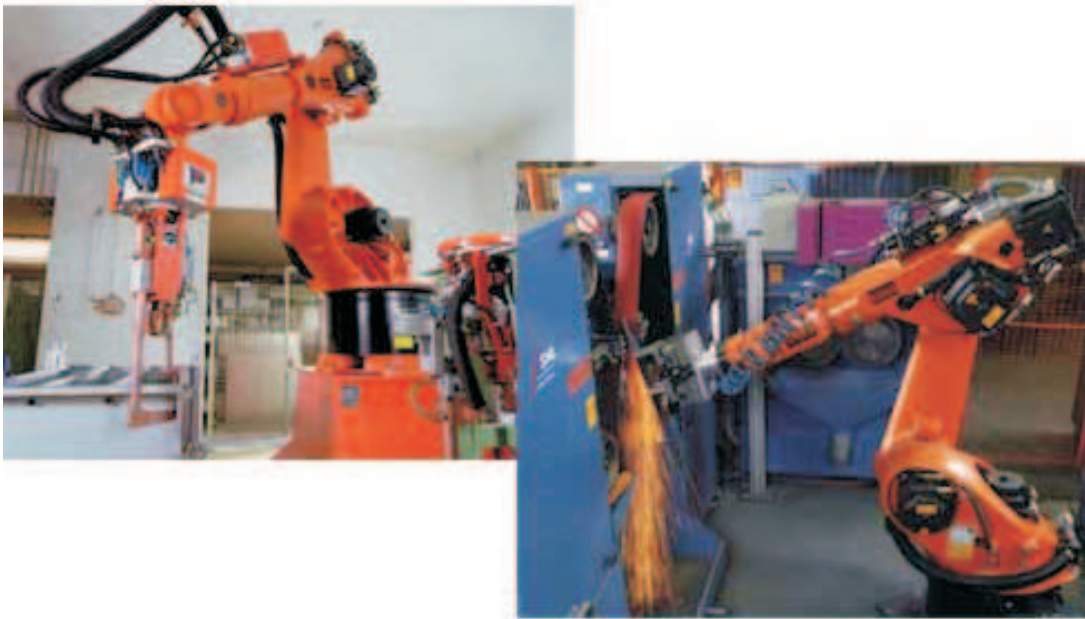
Pierwsze cztery elementy są częściami składowymi każdego rodzaju robota.



Rys. 5

### 1.3. Robot przemysłowy

Zgodnie z podaną wcześniej definicją robot przemysłowy stosowany jest głównie w zakładach wytwórczych do transportu materiałów, manipulacji i pomiarów.



Rys. 6

Zadania transportu materiałów to:

- paletyzacja
- składowanie materiałów w magazynach
- sortowanie części
- pakowanie

Aplikacje na taśmie przemysłowej:

- spawanie, zgrzewanie
- malowanie



- klejenie
- cięcie laserem i wodą
- wiercenie, skrecanie
- składanie części mechanicznych i elektrycznych
- montaż płytek elektronicznych

Jako urządzenie pomiarowe:

- inspekcja części i obiektów
- badania konturów
- pomiar niedokładności wytwarzania

## 1.4. Struktury manipulatorów

### Klasyfikacja manipulatorów

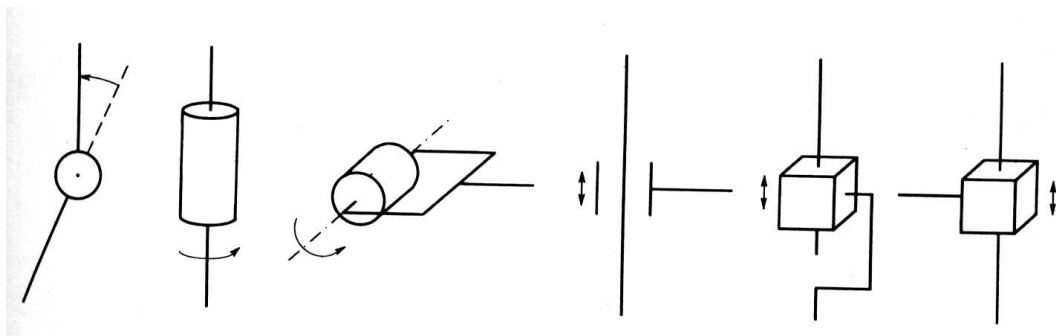
Łańcuch kinematyczny manipulatora składa się z ogniw (członów) i ruchomych połączeń pomiędzy ogniwami, które nazywa się złączami (przeguby). Najczęściej ogniwem jest bryła sztywna, ale spotyka się też ogniwa elastyczne.

Najważniejsze rodzaje ruchomych połączeń (nazwa, ruchy względne, liczba stopni swobody DoF):

1. obrotowe oznaczane literą R (lub O) - 1 obrót, 0 postępów, 1 DoF
2. postępowe oznaczane literą P - 0 obrotów, 1 postęp, 1 DoF
3. śrubowe - 1 obrót, 1 postęp, 1 DoF
4. postępowo-obrotowe - 2 obroty 2 postępy, 2 DoF

Do opisu ruchu manipulatorów wykorzystuje się tylko dwa pierwsze, gdyż każde inne połączenie może być opisane za ich pomocą.

Graficzna reprezentacja przgubów typu R i P stosowana w diagramach (schematach kinematycznych):



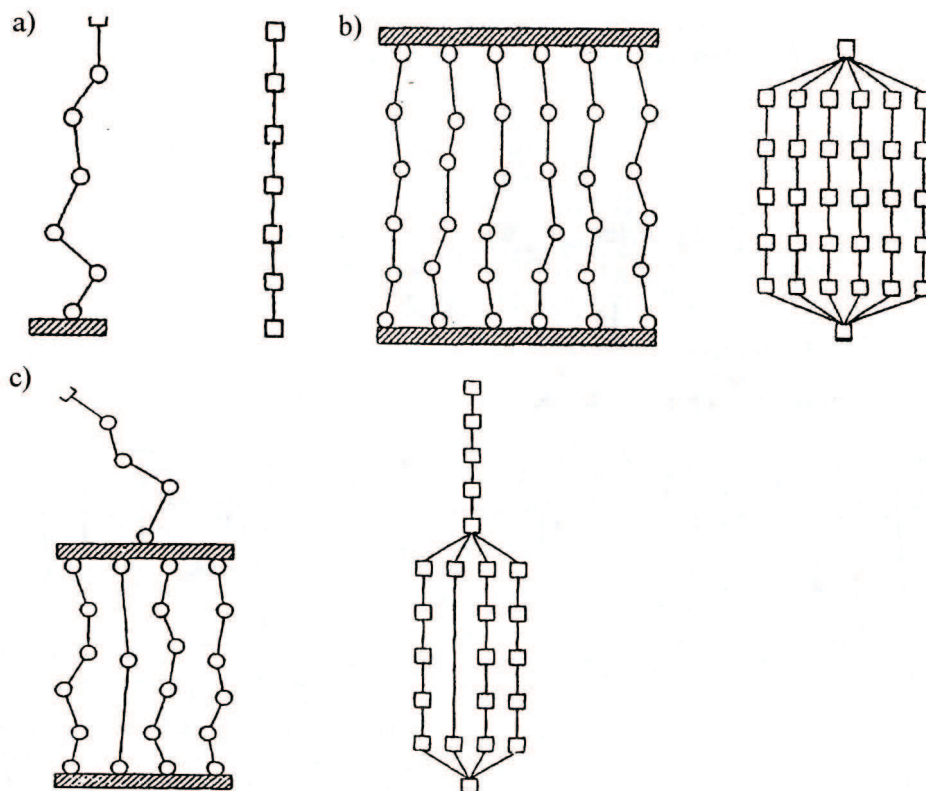
Rys. 7

Łańcuchy kinematyczne można podzielić na cztery grupy:

1. prosty łańcuch kinematyczny otwarty,
2. prosty łańcuch kinematyczny zamknięty,
3. złożony łańcuch kinematyczny otwarty,
4. złożony łańcuch kinematyczny zamknięty.

Ze względu na rodzaj łańcucha kinematycznego manipulatory dzielimy na:

1. szeregowy manipulator prosty - bez gałęzi w łańcuchu,
2. równoległy manipulator - łańcuch kinematyczny złożony ze zbioru równoległych gałęzi,
3. hybrydowy manipulator - kombinacja szeregowego i równoległego.



Rys. 8

## Klasyfikacja robotów

### Generacje robotów:

- roboty I generacji - roboty przemysłowe zaprogramowane na określoną sekwencję czynności
- roboty II generacji - roboty wyposażone w sensory umożliwiające prostą współpracę z otoczeniem
- roboty III generacji - roboty typu ręka-oko (rozpoznawanie obiektów)

### Klasyfikacja wg przeznaczenia:

- do badań naukowych
- do celów szkoleniowych
- do celów przemysłowych
- do celów eksploracji: wód, przestrzeni kosmicznej, powierzchni planet

### Według kryterium napędu:

- z napędem pneumatycznym
- z napędem hydraulicznym
- z napędem elektrycznym (BLDC, PMSM, DC)
- z napędem mieszanym

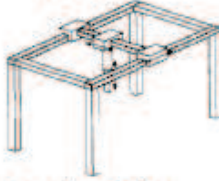

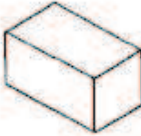

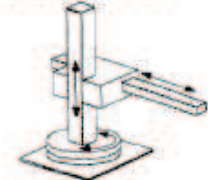



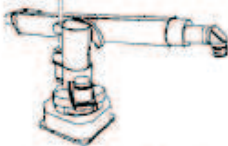



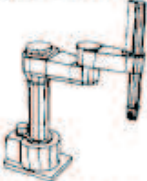
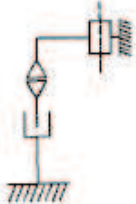







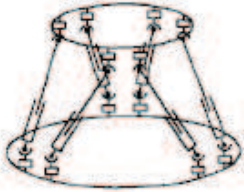


### Podział ze względu na sterowanie:

- manipulatory sterowane sekwencyjnie
- manipulatory sterowane w trybie PTP (Point To Point)

- manipulatory sterowane w trybie CP (Continuous Path)

Według kryterium układu współrzędnych:

- kartezjański - trzy osie wzajemnie prostopadłe (ramię: PPP)
- cylindryczny - dwie osie i jeden kąt (ramię: RPP)
- sferyczny - jedna oś i dwa kąty (ramię: RRP)
- antropomorficzny - trzy kąty: manipulator wykonuje ruchy jak ramię człowieka (ramię: RRR)
- typu SCARA - dwa kąty i jedna osie (ramię: RRP)
- równoległe

Robot	Axes		Examples
Principle	Kinematic Structure	Workspace	Photo
 Cartesian Robot			
 Cylindrical Robot			
 Spherical Robot			
 SCARA Robot			
 Articulated Robot			
 Parallel Robot			

Rys. 9 Źródło: Brian Carlisle Robot Mechanisms, IEEE ICRA 2000

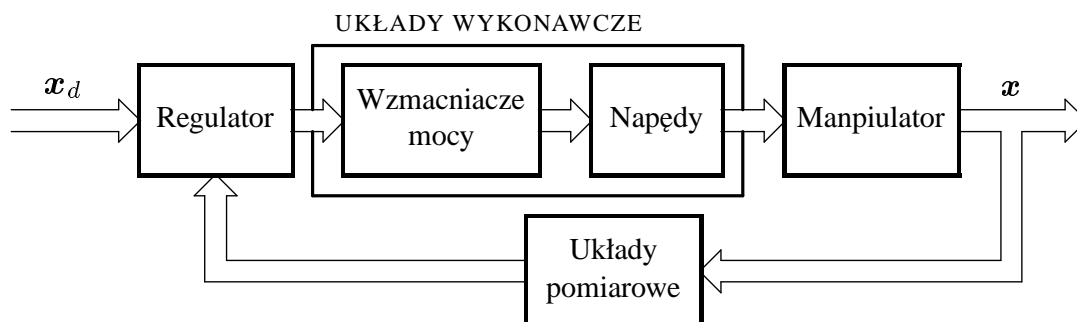
# 1.5. Modelowanie i sterowanie

## Zagadnienia modelowania

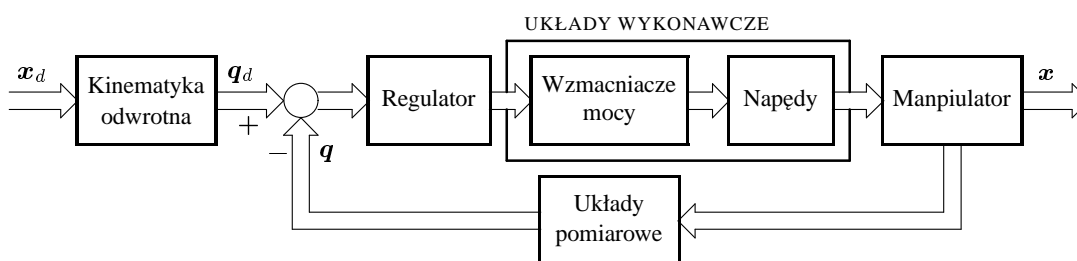


Rys. 10

## Układ sterowania



Rys. 11



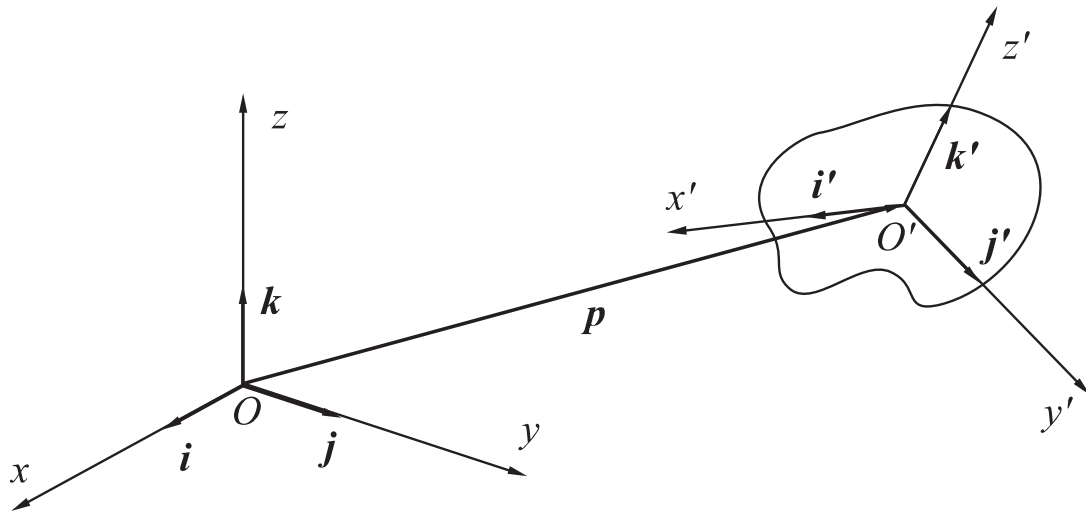
Rys. 12



## 2. Kinematyka

### 2.1. Pozycja i orientacja bryły sztywnej

Bryła sztywna w przestrzeni jest całkowicie opisana przez pozycję i orientację względem ustalonego układu odniesienia.



Rys. 13

Położenie bryły w układzie odniesienia opisuje zależność

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k} \quad (1)$$

Pozycję bryły opisuje zatem wektor  $\mathbf{p}$  łączący początek układu odniesienia z początkiem układu, który związany jest z bryłą

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

Orientację bryły określa się przez opisanie wersorów układu związanego z bryłą w układzie odniesienia

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}' &= i'_x \mathbf{i} + i'_y \mathbf{j} + i'_z \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= j'_x \mathbf{i} + j'_y \mathbf{j} + j'_z \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= k'_x \mathbf{i} + k'_y \mathbf{j} + k'_z \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

## 2.2. Macierz rotacji

Zapisanie poprzedniej zależności w skróconej formie definiuje macierz rotacji  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i'_x & j'_x & k'_x \\ i'_y & j'_y & k'_y \\ i'_z & j'_z & k'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{i}')^T \mathbf{i} & (\mathbf{j}')^T \mathbf{i} & (\mathbf{k}')^T \mathbf{i} \\ (\mathbf{i}')^T \mathbf{j} & (\mathbf{j}')^T \mathbf{j} & (\mathbf{k}')^T \mathbf{j} \\ (\mathbf{i}')^T \mathbf{k} & (\mathbf{j}')^T \mathbf{k} & (\mathbf{k}')^T \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ponieważ kolumny macierzy  $\mathbf{R}$  są wersorami ortogonalnego układu zatem

$$(\mathbf{i}')^T \mathbf{j}' = (\mathbf{j}')^T \mathbf{k}' = (\mathbf{k}')^T \mathbf{i}' = 0$$

z tego też wynika, że

$$(\mathbf{i}')^T \mathbf{i}' = (\mathbf{j}')^T \mathbf{j}' = (\mathbf{k}')^T \mathbf{k}' = 1$$

jak również

$$\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' = \mathbf{k}' \quad \mathbf{j}' \times \mathbf{k}' = \mathbf{i}' \quad \mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = \mathbf{j}'$$

Konsekwencją powyższego jest ortogonalność macierzy  $\mathbf{R}$  czyli

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{U} \quad (5)$$

Jeśli pomnożymy obie strony (5) przez  $\mathbf{R}^{-1}$  to

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad (6)$$

Ponadto  $\det(\mathbf{R}) = +1$  dla układu prawoskrętnego i  $\det(\mathbf{R}) = -1$  dla lewoskrętnego

Jeżeli kolumny macierzy  $\mathbf{R}$  tworzą prawoskrętny kartezjański układ współrzędnych, to zbiór

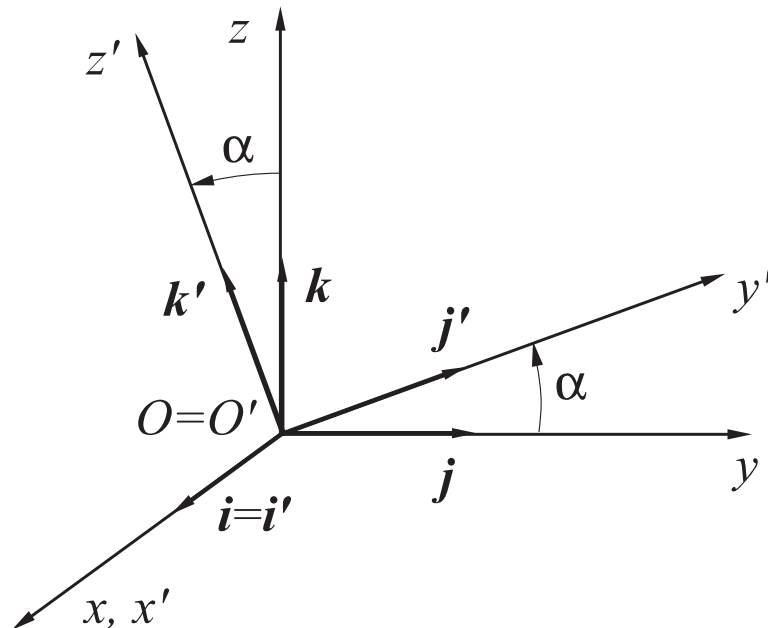
$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{U}, \det \mathbf{R} = +1\} \quad (7)$$

tworzy grupę ze względu na operację mnożenia macierzowego, tzn. spełnia następujące właściwości:

- Jest *zamknięty*, gdyż jeżeli  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in SO(3)$ , to  $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \in SO(3)$ , ponieważ:  
 $(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^T \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 = \mathbf{U}$ ,  
 $\det(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) = \det(\mathbf{R}_1) \det(\mathbf{R}_2) = +1$ .
- Istnieje *element jednostkowy*, macierz  $\mathbf{U}$ , dla której  
 $\mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{R} = \mathbf{R}$ .
- Z zależności (6) wynika, że *elementem odwrotnym* do  $\mathbf{R} \in SO(3)$  jest  $\mathbf{R}^T \in SO(3)$ .
- Łączność wynika z łączności mnożenia macierzowego, tzn.  
 $(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3)$ .

## 2.2.1. Rotacje elementarne

Rotacja wokół osi  $x$  o kąt  $\alpha$



Rys. 14

$$i' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad j' = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad k' = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (8)$$

Rotacja wokół osi  $y$  o kąt  $\beta$

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (9)$$

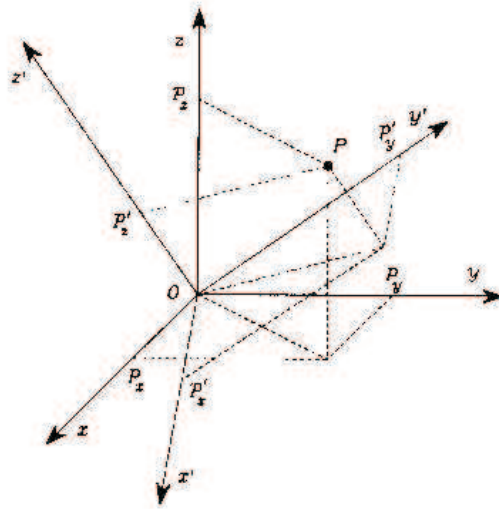
Rotacja wokół osi  $z$  o kąt  $\gamma$

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Można łatwo udowodnić, że

$$\mathbf{R}_k(-\theta) = \mathbf{R}_k^T(\theta) \quad k = x, y, z \quad (11)$$

## 2.2.2. Reprezentacja wektora



Rys. 15

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

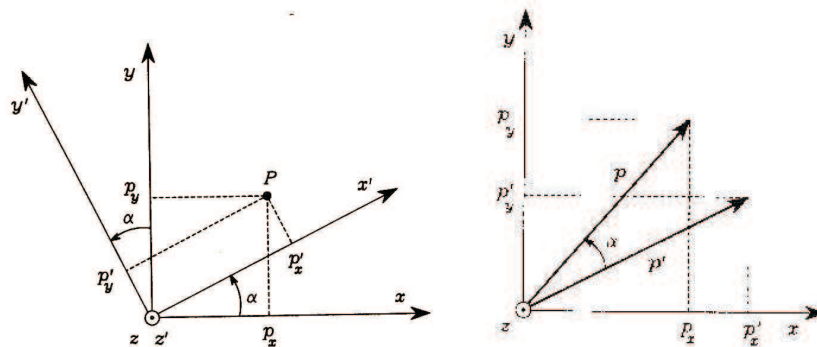
$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x & p'_y & p'_z \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

Ponieważ  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{p}'$  opisują ten sam punkt, to po uwzględnieniu wzoru (4):

$$\mathbf{p} = p'_x \mathbf{i}' + p'_y \mathbf{j}' + p'_z \mathbf{k}' = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \end{bmatrix} \mathbf{p}' = \mathbf{R} \mathbf{p}'. \quad (14)$$

Zatem macierz  $\mathbf{R}$  reprezentuje transformację współrzędnych punktu z układu  $x'y'z'$  do układu  $xyz$ .

### 2.2.3. Rotacja wektora



Rys. 16

Rozważmy wektor  $p$  powstały w wyniku obrotu wektora  $p'$  wokół osi  $z$  o kąt  $\alpha$  oraz współrzędne punktu  $P$  w układzie odniesienia i obróconym o ten sam kąt:

$$\begin{aligned} p_x &= p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha \\ p_y &= p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha \\ p_z &= p'_z \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{p}' \quad (16)$$

#### Interpretacje macierzy rotacji

1. Macierz rotacji określa orientację pomiędzy układami, jej kolumny określają współrzędne wersorów osi układu obróconego w układzie odniesienia.
2. Reprezentuje współrzędne punktu w dwóch różnych układach o wspólnym początku.
3. Jest operatorem pozwalającym obracać wektor w przestrzeni o zadany kąt wokół dowolnej osi.

## 2.3. Składanie rotacji

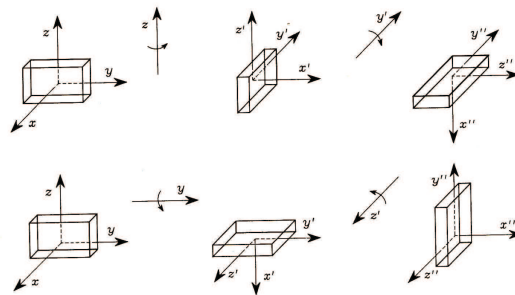
### Składanie rotacji

$$p^0 = R_1^0 p^1, \quad p^1 = R_2^1 p^2, \quad (17)$$

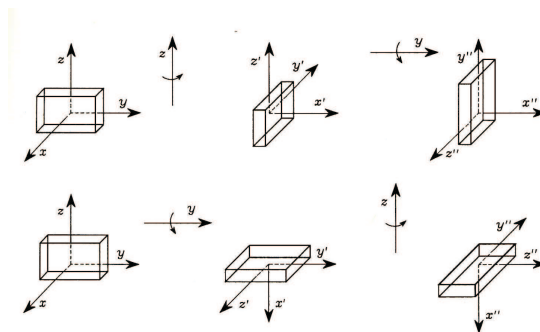
$$p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2, \quad (18)$$

$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1. \quad (19)$$

$$R_i^j = R_{j+1}^j R_{j+2}^{j+1} \cdots R_i^{i-1}, \quad j < i. \quad (20)$$



Rys. 17



Rys. 18

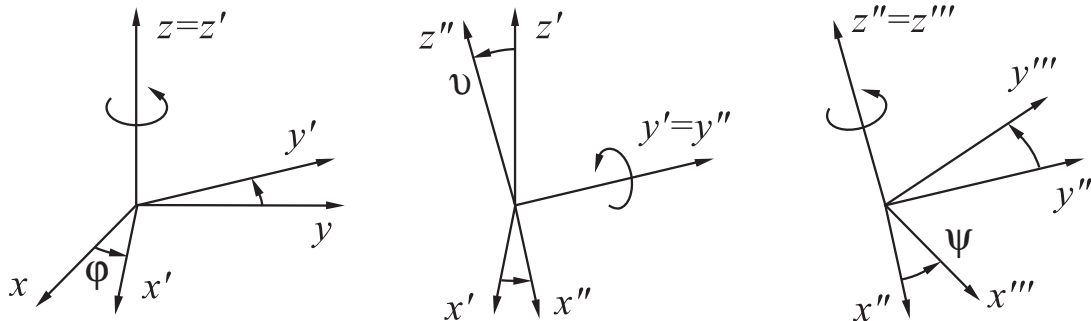
*Mnożenie prawostronne* macierzy rotacji odpowiada rotacji względem *lokalnego* (bieżącego) układu współrzędnych.

*Mnożenie lewostronne* macierzy rotacji odpowiada rotacji względem *podstawowego* układu współrzędnych (odniesienia).



## 2.4. Kąty Eulera

### 2.4.1. Kąty ZYZ



Rys. 19

#### Parametryzacja prosta macierzy rotacji

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ZYZ} &= \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_{y'}(\vartheta)\mathbf{R}_{z''}(\psi) = \\ &= \begin{bmatrix} c\varphi c\vartheta c\psi - s\varphi s\psi & -c\varphi c\vartheta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\vartheta \\ s\varphi c\vartheta c\psi + c\varphi s\psi & -s\varphi c\vartheta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\vartheta \\ -s\vartheta c\psi & s\vartheta s\psi & c\vartheta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

#### Parametryzacja odwrotna macierzy rotacji

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Założywszy, że w (27)  $r_{13} \neq 0$ ,  $r_{23} \neq 0$ , otrzymujemy:

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \quad (23)$$

Jeżeli założymy ponadto, że  $\vartheta \in (0, \pi)$ , to otrzymujemy

rozwiązanie:

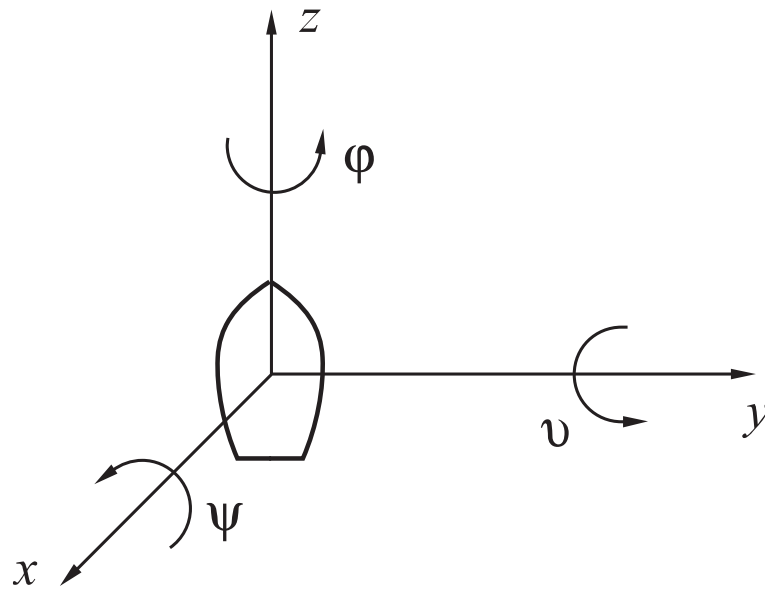
$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi &= \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Z kolei jeśli  $\vartheta \in (-\pi, 0)$ , rozwiązanie przyjmuje postać:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi &= \text{Atan2}(-r_{32}, r_{31}) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Rozwiązania (24) i (25) stają się niejednoznaczne, gdy  $\sin \vartheta = 0$ .

## 2.4.2. Kąty RPY Roll-Pitch-Yaw



Rys. 20

### Parametryzacja prosta macierzy rotacji

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{RPY} &= \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(\vartheta)\mathbf{R}_x(\psi) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c\varphi c\vartheta & c\varphi s\vartheta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\vartheta c\psi + s\varphi s\psi \\ s\varphi c\vartheta & s\varphi s\vartheta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\vartheta c\psi - c\varphi s\psi \\ -s\vartheta & c\vartheta s\psi & c\vartheta c\psi \end{bmatrix} \quad (26)
 \end{aligned}$$

## Parametryzacja odwrotna macierzy rotacji

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Dla kąta  $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$ :

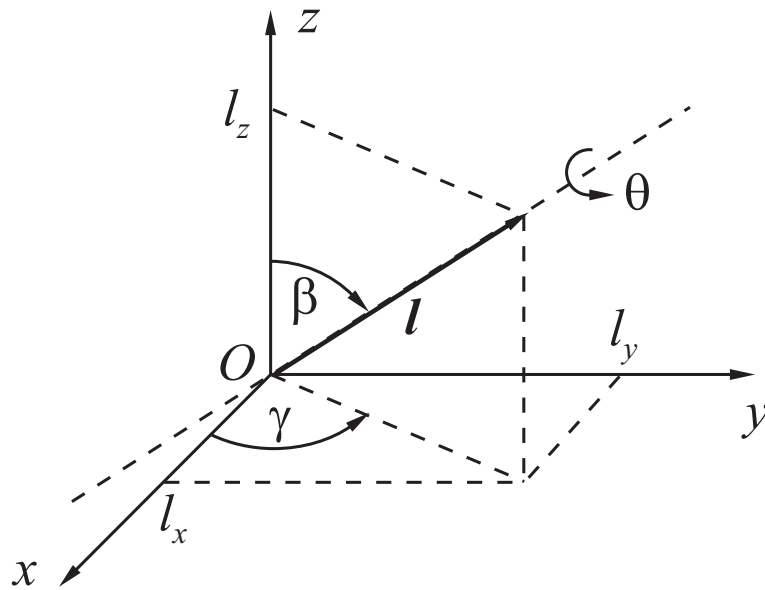
$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi &= \text{Atan2}(r_{32}, r_{33}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Dla  $\vartheta \in (\pi/2, 3\pi/2)$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi &= \text{Atan2}(-r_{32}, -r_{33}) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Rozwiązania te stają się niejednoznaczne dla  $\vartheta = \pm\pi/2$ .

## 2.5. Reprezentacja oś-ką



Rys. 21

### Parametryzacja prosta macierzy rotacji

$$\mathbf{Rot}(l, \theta) = \mathbf{R}_l(\theta) = \mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{R}_y(-\beta)\mathbf{R}_z(-\gamma) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & \cos \gamma &= \frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \\ \sin \beta &= \frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} & \cos \beta &= \frac{l_z}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Rot}(l, \theta) =$$

$$= \begin{bmatrix} l_x^2 \text{vers} \theta + \cos \theta & l_x l_y \text{vers} \theta - l_z \sin \theta & l_x l_z \text{vers} \theta + l_y \sin \theta \\ l_x l_y \text{vers} \theta + l_z \sin \theta & l_y^2 \text{vers} \theta + \cos \theta & l_y l_z \text{vers} \theta - l_x \sin \theta \\ l_x l_z \text{vers} \theta - l_y \sin \theta & l_y l_z \text{vers} \theta + l_x \sin \theta & l_z^2 \text{vers} \theta + \cos \theta \end{bmatrix} \quad (31)$$

gdzie

$$\text{vers} \theta = (1 - \cos \theta)$$

$$\mathbf{Rot}(-\mathbf{l}, -\theta) = \mathbf{Rot}(\mathbf{l}, \theta) \quad (32)$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{l}, \theta) = \mathbf{U}^T + (\mathbf{U} - \mathbf{U}^T) \cos \theta + \mathbf{S}(\mathbf{l}) \sin \theta \quad (33)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{l}) = \begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

### Parametryzacja odwrotna macierzy rotacji

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\theta = \arccos \left( \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) = \arccos \left( \frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} \right) \quad (36)$$

$$\mathbf{l} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1 \quad (38)$$

## 2.6. Kwaterniony jednostkowe

Definicja kwaternionu:

$$Q = \eta + \varepsilon_1 \mathbf{i} + \varepsilon_2 \mathbf{j} + \varepsilon_3 \mathbf{k} \quad (39)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  są wersorami ortogonalnego układu współrzędnych.

$$Q = \{\eta, \boldsymbol{\epsilon}\} \quad (40)$$

Kwaternion sprzężony z  $Q$ :

$$Q^* = \{\eta, -\boldsymbol{\epsilon}\} \quad (41)$$

Operacja dodawania/odejmowania kwaternionów  $Q_1 = \{\eta_1, \boldsymbol{\epsilon}_1\}$ ,  $Q_2 = \{\eta_2, \boldsymbol{\epsilon}_2\}$ :

$$Q_1 \pm Q_2 = \{\eta_1 \pm \eta_2, \boldsymbol{\epsilon}_1 \pm \boldsymbol{\epsilon}_2\} \quad (42)$$

Operacja mnożenia:

$$Q_1 * Q_2 = \{\eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1^T \boldsymbol{\epsilon}_2, \eta_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2\} \quad (43)$$

Mnożenie kwaternionów jest łączne i rozdzielne względem dodawania/odejmowania, ale nie jest przemienne.

Kwaternion odwrotny jest określony wzorem:  $Q^{-1} = Q^* / \|Q\|^2$

Elementem jednostkowym dla mnożenia jest  $Q = \{1, \mathbf{0}\}$ .

Kwaternion jednostkowy:

$$\|Q\| = \sqrt{\eta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = 1 \quad (44)$$

## Związek kwaternionów z opisem oś/kąt

Mając daną macierz rotacji (31), (33), można zdefiniować następujący kwaternion reprezentujący tę rotację:

$$\mathcal{Q} = \{\cos(\theta/2), \mathbf{l} \sin(\theta/2)\} \quad (45)$$

$$\|\mathcal{Q}\| = \cos^2(\theta/2) + \|\mathbf{l}\| \sin^2(\theta/2) = \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1 \quad (46)$$

## Związek kwaternionów z macierzą rotacji

Na podstawie składowych  $\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  oraz  $\varepsilon_3$  kwaternionu jednostkowego  $\mathcal{Q} = \{\eta, \boldsymbol{\varepsilon}\}$  możemy wyznaczyć odpowiadającą mu macierz rotacji  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \varepsilon_1^2) - 1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2 + \varepsilon_2^2) - 1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2 + \varepsilon_3^2) - 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Założywszy znajomość macierzy  $\mathbf{R}$ , można wyznaczyć składowe  $\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  reprezentacji kwaternionowej rotacji.

$$\eta^2 = \frac{\text{tr}(\mathbf{R}) + 1}{4} \quad (48)$$

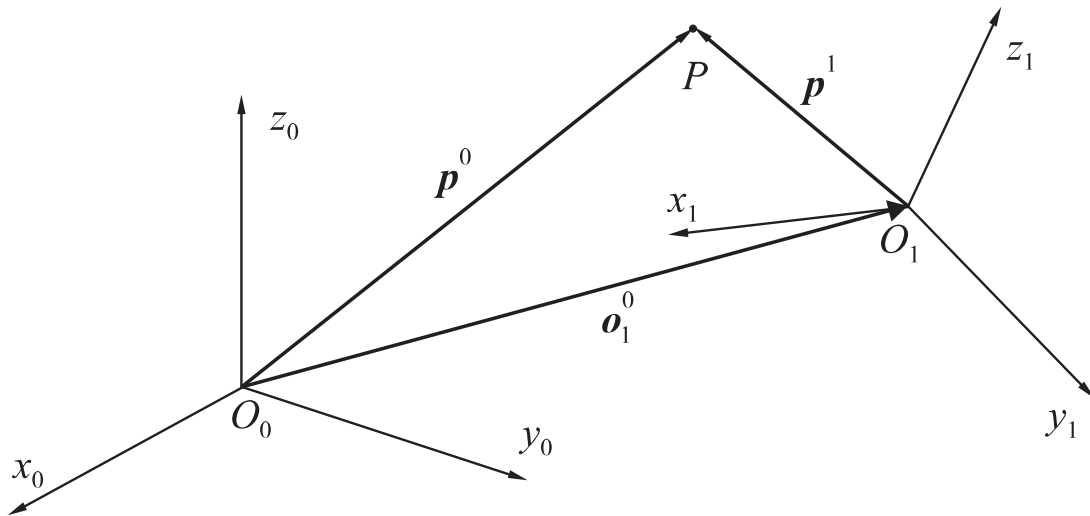
przy czym  $\text{tr}(\mathbf{R}) = \sum_i r_{ii}$  i oznacza ślad macierzy  $\mathbf{R}$ , a  $r_{ii}$  są elementami na diagonalu macierzy  $\mathbf{R}$  (wzór (27)).

$$\varepsilon_i^2 = \frac{r_{ii}}{2} - \frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{4}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (49)$$

We wzorach (48), (49) nie ma punktów osobliwych, co niestety występuje przy zastosowaniu kątów Eulera lub reprezentacji oś/kąt.



## 2.7. Transformacje jednorodne



Rys. 22

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1, \quad (50)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4. \quad (51)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{T}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}^1, \quad (52)$$

$$\mathbf{T}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Obroty elementarne  $\mathbf{R}_x(\alpha)$ ,  $\mathbf{R}_y(\beta)$ ,  $\mathbf{R}_z(\gamma)$  przesunięcie np.  $\mathbf{D}_x(a)$  lub ogólnie  $\mathbf{D}(\mathbf{k})$

Jeśli dokonujemy jednocześnie obrotu i przesunięcia wzdłuż tej samej osi: Skręt $_k(a, \alpha) = \mathbf{R}_k(\alpha)\mathbf{D}_k(a)$

## Transformacje jednorodne - przekształcenie odwrotne

$$\mathbf{p}^1 = -(\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{o}_1^0 + (\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{p}^0 = -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}^0. \quad (54)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{T}_0^1 \tilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{T}_1^0)^{-1} \tilde{\mathbf{p}}^0, \quad (55)$$

$$\mathbf{T}_0^1 = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_1^0)^T & -(\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_3^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$\mathbf{T}^{-1} \neq \mathbf{T}^T. \quad (57)$$

## Złożenie przekształceń (równania przekształceń)

$$\tilde{\mathbf{p}}^j = \mathbf{T}_{j+1}^j \mathbf{T}_{j+2}^{j+1} \dots \mathbf{T}_i^{i-1} \tilde{\mathbf{p}}^i, \quad j < i, \quad (58)$$

gdzie  $\mathbf{T}_i^{i-1}$  określa transformację jednorodną w układzie  $x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$  na podstawie opisu w układzie  $x_iy_iz_i$ .

## Inne zastosowania przekształcenia jednorodnego

### Rozciąganie, skalowanie, perspektywa

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

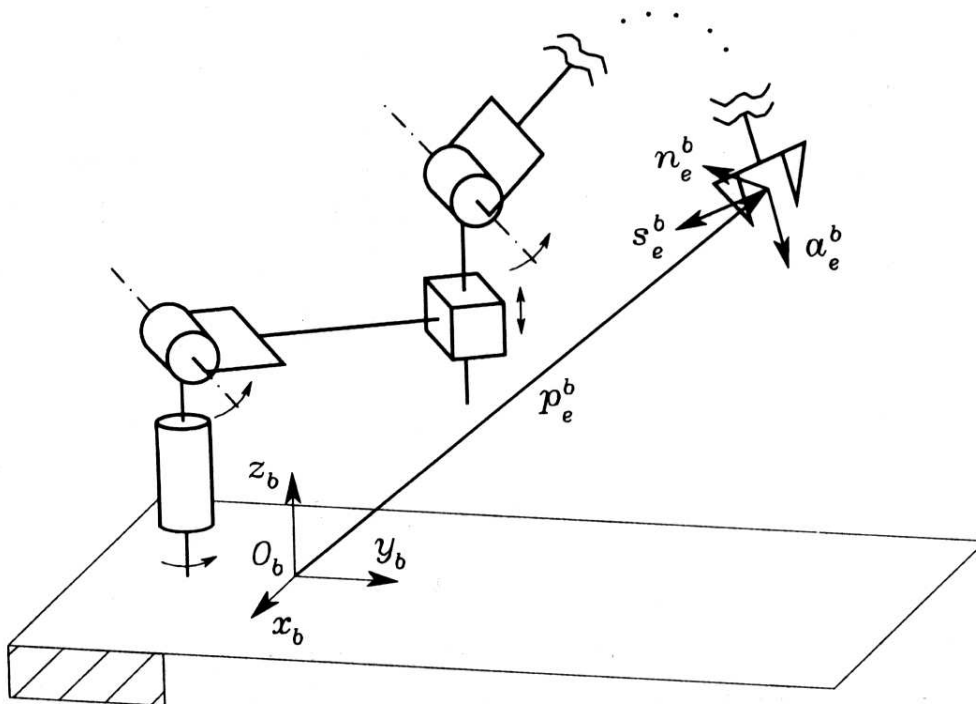
## 2.8. Zadanie proste kinematyki

### Rozwiązanie zadania prostego kinematyki

Rozwiązanie zadania prostego kinematyki polega na określeniu położenia i orientacji efektora (chwytaka, narzędzia) w funkcji zmiennych uogólnionych  $q$  i parametrów kinematycznych manipulatora w układzie bazowym.

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_1^0(q_1) \mathbf{T}_2^1(q_2) \mathbf{T}_3^2(q_3) \dots \mathbf{T}_n^{n-1}(q_n) \quad (60)$$

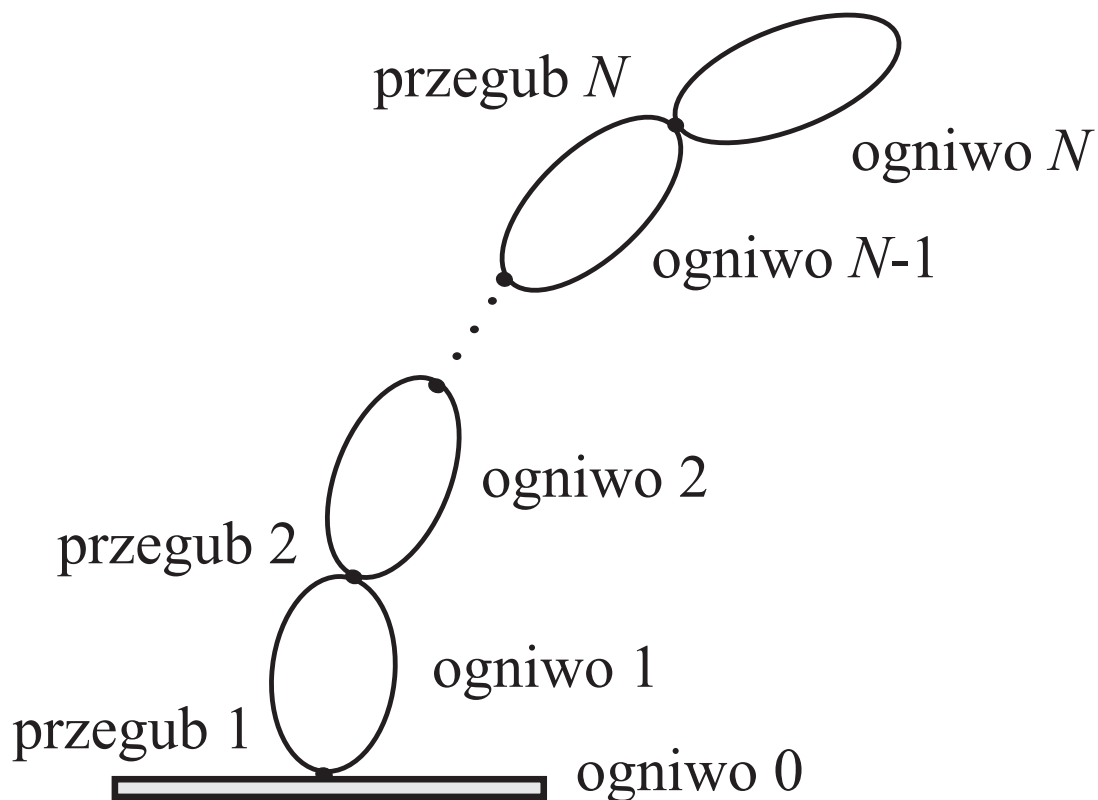
$$\mathbf{T}_e^b = \mathbf{T}_0^b \mathbf{T}_n^0 \mathbf{T}_e^n \quad (61)$$



Rys. 23

$$\mathbf{T}_e^b = \begin{bmatrix} n_e^b(\mathbf{q}) & s_e^b(\mathbf{q}) & a_e^b(\mathbf{q}) & p_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

### 2.8.1. Otwarty łańcuch kinematyczny

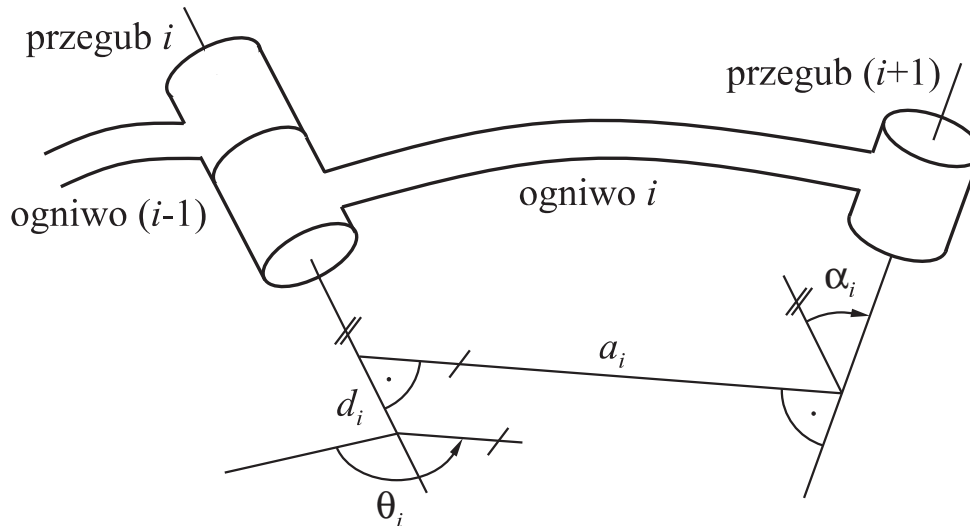


Rys. 24

Numeracja ogniw i przegubów

## 2.8.2. Opis ogniwa manipulatora

### Parametry kinematyczne Denavita-Hartenberga



Rys. 25

#### Parametry kinematyczne D-H:

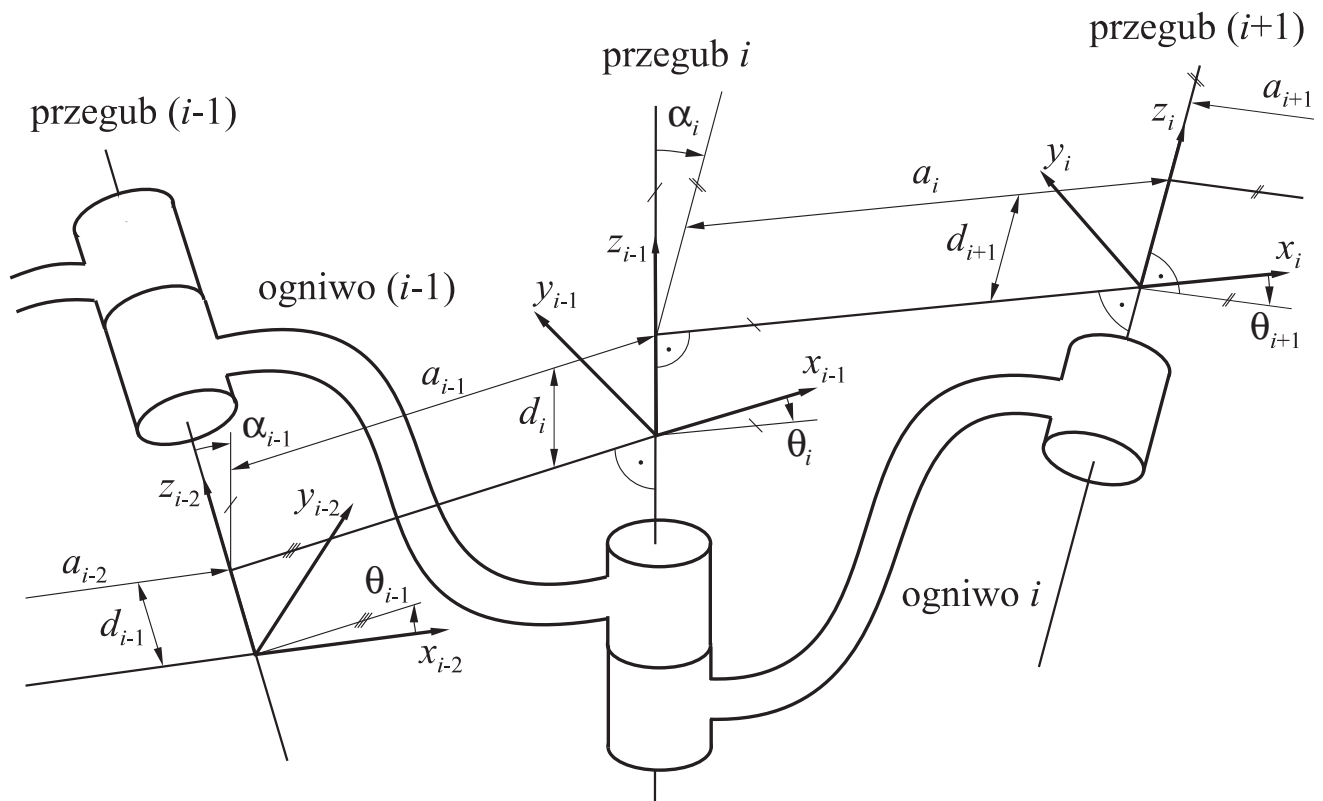
- $a_i$  - długość  $i$ -tego ogniwa: jest pomiędzy osiami przegubów  $i$  a  $(i + 1)$
- $\alpha_i$  - kąt skręcenia  $i$ -tego ogniwa: kąt mierzony prawoskrętnie wokół  $a_i$  między osiami przegubów  $i$  a  $(i + 1)$
- $d_i$  - odsunięcie ogniwa: odległość między  $a_{i-1}$   $a_i$  mierzona wzdłuż osi przegubu  $i$ -tego
- $\theta_i$  - kąt konfiguracji ogniw: kąt między  $a_{i-1}$   $a_i$  mierzony prawoskrętnie wokół osi  $i$ -tego przegubu

Zmienna uogólniona  $q_i$  związana z  $i$ -tym ogniwem:

$$q_i = (1 - \sigma_i)\theta_i + \sigma_i d_i, \quad (63)$$

$\sigma_i = 0$  gdy  $i$ -ty przegub jest obrotowy lub  $\sigma_i = 1$  gdy jest przesuwany

### 2.8.3. Notacja Denevita-Hartenberga



Rys. 26

#### Algorytm rozwiązania zadania prostego kinematyki w notacji DH:

1. Ponumeruj przeguby, określ osie  $z_0$  do  $z_{n-1}$  tak, by oś  $z_i$  pokrywała się z osią przegubu  $(i + 1)$  – *wszego*.
2. Ułokuj dowolnie początek układu 0 na osi  $z_0$ , osie  $x_0, y_0$  określ tak, by powstał układ prawoskrętny.

Powtarzaj kroki 3-5 dla  $i = 1, \dots, n - 1$ :

3. Umieść początek układu  $O_i$  w punkcie przecięcia osi  $z_i$  przez wspólną normalną z osią  $z_{i-1}$ . Jeśli osie  $z_i, z_{i-1}$  są równoległe a przegub  $i$ -ty jest a) obrotowy, to umieść  $O_i$  tak, by  $d_i = 0$ ; b) przesuwany, to umieść  $O_i$  dowolnie np. na końcu zakresu mechanicznego.

4. Wybierz oś  $x_i$  wzdłuż wspólnej normalnej osi  $z_{i-1}$  i  $z_i$  w kierunku od przegubu  $i$ -tego do  $(i + 1)$ -wszego. Jeśli osie  $z_i$   $z_{i-1}$  się przecinają, to oś  $x_i$  ma dowolny kierunek.
5. Oś  $y_i$  uzupełnia układ do układu prawoskrętnego.

Na koniec:

6. Określ układ  $n$ -ty. Jeśli przegub  $n$ -ty jest: a) obrotowy, to umieść  $z_n$  równoległe do  $z_{n-1}$ ; b) przesuwny, to wybierz arbitralnie  $z_n$ . Osie  $x_n, y_n$  określ jak w punktach 4 i 5.
7. Dla  $i = 1, \dots, n$  zapisz w postaci tabeli parametry  $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$ .
8. Dla określonych parametrów w 7 oblicz  $\mathbf{T}_i^{i-1}(q_i)$ , gdzie  $i = 1, \dots, n$ .

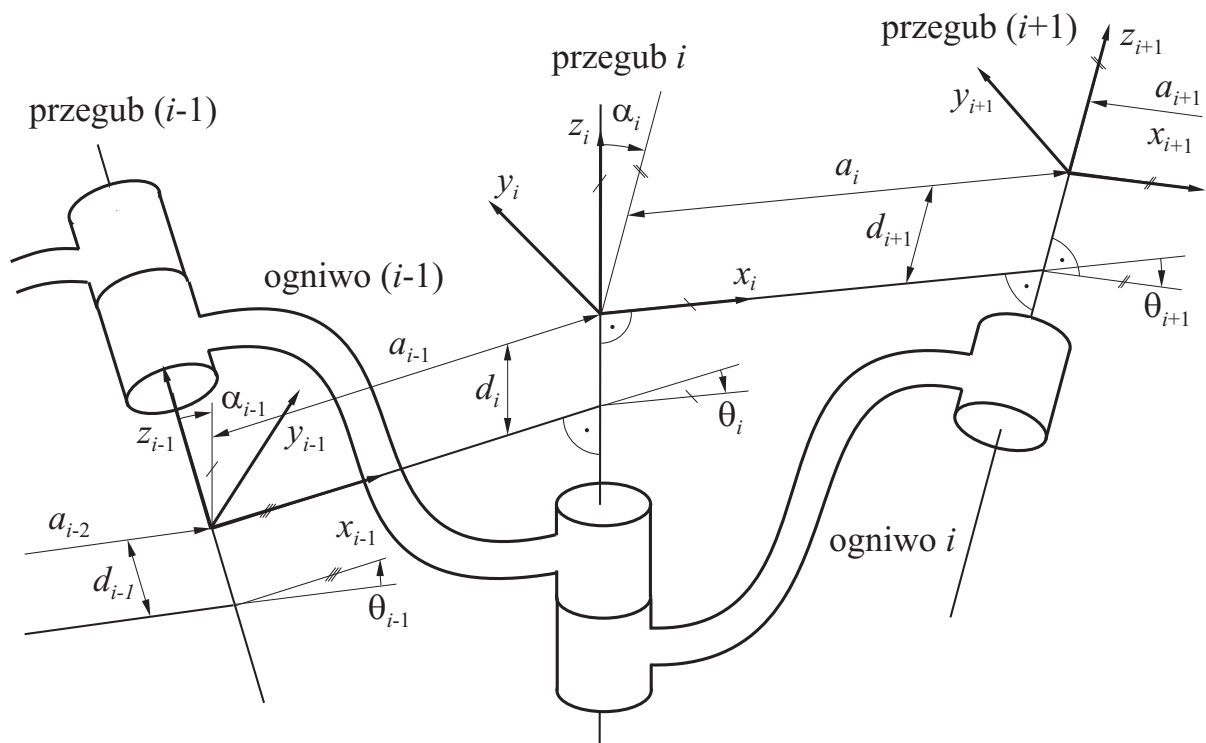
$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \mathbf{R}_z(\theta_i)\mathbf{D}_z(d_i)\mathbf{R}_x(\alpha_i)\mathbf{D}_x(a_i) = \text{Skre}t_z(d_i, \theta_i)\text{Skre}t_x(a_i, \alpha_i)$$

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\mathbf{R}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

9. Oblicz  $\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_1^0\mathbf{T}_2^1\dots\mathbf{T}_n^{n-1}$ .
10. Dla danych  $\mathbf{T}_0^b$  i  $\mathbf{T}_e^n$  oblicz  $\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b\mathbf{T}_n^0\mathbf{T}_e^n$  określającą położenie i orientację efektora w układzie bazowym.

## 2.8.4. Zmodyfikowana notacja Denevita-Hartenberga



Rys. 27

Algorytm rozwiązania zadania prostego kinematyki w notacji ZDH:

1. Ponumeruj przeguby, określ osie  $z_1$  do  $z_n$  tak, by oś  $z_i$  pokrywała się z osią  $i$ -tego przegubu.

Powtarzaj kroki 2-4 dla  $i = 1, \dots, n$ :

2. Umieść początek układu  $O_i$  w punkcie przecięcia osi  $z_i$  przez wspólną normalną z osią  $z_{i+1}$ . Jeśli osie  $z_i$   $z_{i+1}$  są równoległe a przegub  $i$ -ty jest a) obrotowy, to umieść  $O_i$  tak, by  $d_i = 0$ ; b) przesuwany, to umieść  $O_i$  dowolnie np. na końcu zakresu mechanicznego.
3. Wybierz oś  $x_i$  wzdłuż wspólnej normalnej osi  $z_i$  i  $z_{i+1}$  w kierunku od przegubu  $i$ -tego do  $(i + 1)$ -wszego.
4. Oś  $y_i$  uzupełnia układ do układu prawoskrętnego.

Na koniec:



5. Określ układ 0-wy. Jeśli można, to umieść  $z_0$  równoległe do  $z_1$ . Oś  $z_0$  i  $x_0$  umieść tak, by wyzerować jak największą liczbę parametrów kinematycznych.
6. Dla  $i = 1, \dots, n$  zapisz w postaci tabeli parametry  $a_{i-1}, \alpha_{i-1}, d_i, \theta_i$ .
7. Dla określonych parametrów w 6 oblicz  $\mathbf{T}_i^{i-1}(\mathbf{q}_i)$ , gdzie  $i = 1, \dots, n$ .

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \mathbf{R}_x(\alpha_{i-1})\mathbf{D}_x(a_{i-1})\mathbf{R}_z(\theta_i)\mathbf{D}_z(d_i) = \text{Skret}_x(a_{i-1}, \alpha_{i-1})\text{Skret}_z(d_i, \theta_i)$$

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -d_i \sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\mathbf{R}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{p}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} a_{i-1} \\ -d_i \sin \alpha_{i-1} \\ d_i \cos \alpha_{i-1} \end{bmatrix} \quad (67)$$

8. Oblicz  $\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_1^0\mathbf{T}_2^1\cdots\mathbf{T}_n^{n-1}$ .
9. Dla danych  $\mathbf{T}_0^b$  i  $\mathbf{T}_e^n$  oblicz  $\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b\mathbf{T}_n^0\mathbf{T}_e^n$  określającą położenie i orientację efektora w układzie bazowym.